LYCEE SBEITLA

Mo

Professeur : ELBELLILI .

✧✧✧

Date : 03 - 12 - 2013 Durée: 2 heures

✧✧✧

Section : 4ème SC INFORMATIQUE

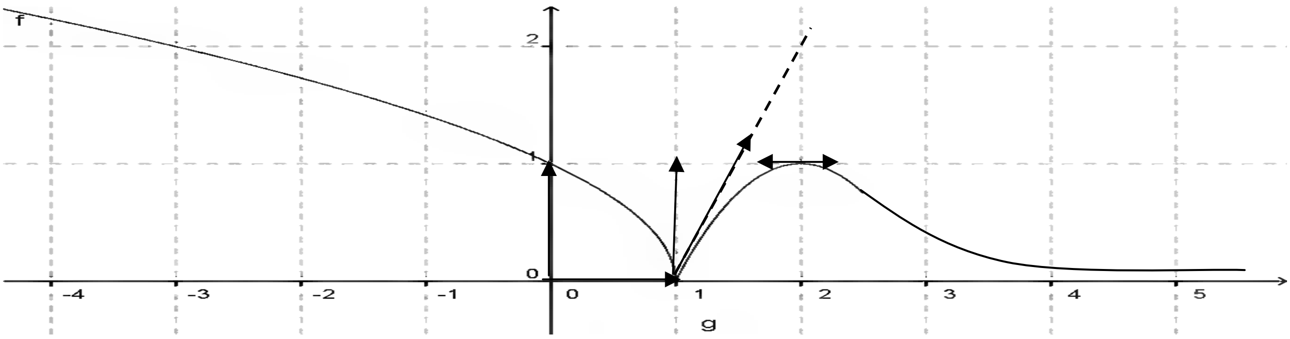
Devoir de synthèse n°1

EXERCICE N°1:(3,5pts)

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on a représentée ci-dessous la courbe (C) d'une fonction h telle que :

On donne :

- L'axe des abscisses est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$
- (C) admet une branche parabolique de direction $\left(O, \vec{i}\right)$ au voisinage de $-\infty$
- (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.
- (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.



1) Par une lecture graphique répondre aux questions suivantes:

   a- Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

   b- Donner la valeur de h'(2) et de $h'_d(1)$.

   c- Déterminer $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{h(x)}{x-1}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} h\left(\dfrac{1}{x^2+3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)$

EXERCICE N°2:(5,5 pts)

1) a- Montrer que $(3+3i)^2 = 18i$

   b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2+(3-3i)z-9i=0$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3-3i\,z^2-9\,z+27i=0$.

   a- Vérifier que 3 est une racine de (E).

   b- déterminer les nombres complexes a, b et c tels que $z^3-3i\,z^2-9\,z+27i=(z-3)\left(az^2+bz+c\right)$

   c- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives: $z_A = 3i$; $z_B = 3$ et $z_C = -3$.

   a- Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   b- Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

EXERCICE N°2:(**5 pts**)

Soit la suites (U_n) définie sur IN par $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n-1}{2u_n} \end{cases}$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_n$.

2) a- Vérifier que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2u_n^2+3u_n-1}{2u_n}$.

b- En déduire que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $v_n = \dfrac{2u_n-2}{2u_n-1}$

a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c- Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE N°2:(**6 pts**)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

On désigne par (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a- Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Montrer que le point O est un point d'inflexion de (ζ).

d- Déterminer une équation de la tangente à la courbe (ζ) au point O.

3) a- Montrer que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b- Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.

c- Calculer f(2) puis déterminer $(f^{-1})'\left(\dfrac{2}{5}\right)$.

Bon travail