

Mathématiques

4^{ème} Math**Devoir de contrôle****N°01**

Durée : 2 heures

Professeur

Elabidi Zahi

Exercice 01 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2 + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 2 + \sqrt{x^2 - 3x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ Interpréter graphiquement le résultat

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $2 - x \leq f(x) \leq x + 2$

b) Dédurre $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et que f est continue en 0

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)$

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ admet au moins une solution α dans $\left[\frac{2}{3\pi}; \frac{2}{\pi}\right]$

b) Montrer que $\cos\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{\sqrt{4\alpha^2 - 1}}{2\alpha}$

4) Montrer que la droite d'équation $y = -x + \frac{7}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$

5) Soit g la restriction de f sur $]-\infty; 0]$

On désigne par h la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = g(-\tan x)$

Montrer que h est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 02 : (7 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Soient A et B les points d'affixes respectives 2 et 4 et θ un réel de $]0; \pi[$

On considère l'équation $(E_\theta) : z^2 - 4z + 4(1 - e^{2i\theta}) = 0$

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_\theta) : z^2 - 4z + 4(1 - e^{2i\theta}) = 0$

2) Soient les points M et M' d'affixes respectives $2(1 + e^{i\theta})$ et $2(1 - e^{i\theta})$

a) Vérifier que $1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ et que $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

b) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en O

c) Montrer que l'aire du triangle OMM' est égale à $4 \sin \theta$

- 3) On désigne par E l'ensemble décrit par M et par E' l'ensemble décrit par M' lorsque θ décrit $]0; \pi[$
- Déterminer et construire l'ensemble E
 - Montrer que M et M' sont symétriques par rapport au point A
 - Construire alors l'ensemble E'
- 4) Soit N le point d'affixe $(2 + 2i)(1 + e^{i\theta})$
- Montrer que le triangle OMN est rectangle, isocèle en M et direct
 - En déduire une construction du point N à partir de M
- 5) a) Montrer que $OM'NM$ est un trapèze
- Montrer que l'aire de ce trapèze est égale $4 \left(1 + \sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right)$
 - Déterminer la valeur de θ pour que l'aire du trapèze soit maximale

Exercice 03 : (7 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2u_n + 4}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$
 - Montrer que la suite (u_n) est décroissante
 - En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{3}(u_n - 2)$
 - En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ et $v_n = \frac{S_n}{n}$

 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n < S_n \leq 2n + \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$.
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
- Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, $3^n \geq n^2$
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \frac{1}{n(u_n - 2)}$
Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $w_n \geq n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sqrt{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k (u_k - 2)$

 - Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| T_n - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2n} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$
 - En déduire que la suite (T_n) est convergente et préciser sa limite