Mathématiques	LYCÉE DE SBEÏTLA DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 3 Durée : 4 heures	Professeur :
$4^{ème}$ Maths	Année scolaire : 2015 // 2016	Elabidi Zahi

EXERCICE 01 : (3 points)

On considère l'équation différentielle $(E): y' - 2y = xe^{x}$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

2) Soit a et b deux réels et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{x}$

   a) Déterminer a et b pour que g soit une solution de (E)

   b) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E_0)

   c) En déduire l'ensemble des solutions de (E)

3) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0

EXERCICE 02 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right)$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

I.1) Montrer que pour tout x appartenant $[0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$

2) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé

3) Dresser le tableau de variation de f

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O

   b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C)

   c) Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la droite Δ et la courbe (C)

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée

   b) En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = x$

   c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^{1} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$

2) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

   a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_0^{1} \ln\left(1+t^2\right)dt = \ln 2 - 2 + 2\int_0^{1} \dfrac{dt}{1+t^2}$

   b) En déduire la valeur de $\mathscr{A}$

EXERCICE 03 : (4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 2\times 10^n + 1$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n est divisible par 3

2) a) Discuter selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de a_n par 11

   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n et 11 sont premiers entre eux

3) On considère, dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(E): a_2 x + 11y = 1$

   a) Vérifier que le couple $(4,-73)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

   b) Résoudre, dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E)

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$

   On considère le point A_n d'affixe $z_n = 2e^{i\frac{a_n\pi}{4}}$

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n appartient à un cercle fixe que l'on précisera

   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \{A_1 ; A_2\}$

EXERCICE 04: (4 points)

Une usine fabrique des stylos à bille .Une étude statistique à montré que 90% de la production ne présente pas de défaut. Chaque stylo est soumis à un contrôle de fabrication
Ce contrôle refuse 94% des stylos avec défaut et accepte 92% des stylos sans défaut
On choisit au hasard un stylo avant son contrôle
On désigne par D l'évènement « le stylo à un défaut » et par A l'évènement « le stylo est accepté à l'issue du contrôle »

1) a) Déterminer les probabilités $p(\overline{D})$, $p(\overline{A}/D)$ et $p(A/\overline{D})$

   b) Calculer la probabilité que le stylo soit accepté

2) Calculer la probabilité qu'un stylo à un défaut sachant qu'il est accepté

3) Les stylos acceptés à l'issue du contrôle se vendent par paquet de quatre
   On admet que la probabilité qu'un stylo accepté présente un défaut est $0{,}007$
   Calculer une valeur arrondie à 10^{-3} près de la probabilité qu'un paquet contienne au moins un stylo présentant un défaut

4) On estime que la durée de vie T en jours d'un stylo accepté suit la loi exponentielle de paramètre λ un réel strictement positif

   a) Déterminer λ sachant que $p(T>10) = \frac{1}{e}$

   b) On sait que le stylo a déjà dépassé 10 jours d'utilisation .Quelle est la probabilité qu'il dépasse 15 jours ?

   c) Soit h un réel strictement positif. Montrer que $p\big((T>10+h)/(T>10)\big) = p(T>h)$

EXERCICE 05: (3 points)

On donne les hauteurs, en centimètres, d'une plante mesurée tous les trois jours à midi du premier au 16 juillet

Jour x_i	1	4	7	10	13	16
Hauteur y_i	6,5	8,4	12	15,4	19,7	24,6

On pose $Z = \ln Y$

Les valeurs de Z, arrondis à 10^{-2} près, sont données dans le tableau qui suit

Jour x_i	1	4	7	10	13	16
$z_i = \ln y_i$	1,87	2,13	2,48	2,73	2,98	3,20

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire ρ de la série (X,Z) .Interpréter le résultat

2) a) Donner une équation de la droite de régression de Z en X

(On donnera les coefficients de cette équation arrondis à 10^{-2} près)

b) En déduire que l'expression de Y en fonction de X est de la forme $Y=\alpha e^{\beta X}$

(α et β étant deux réels dont on donnera les valeurs respectives arrondies à 10^{-2} près)

3) On suppose que la croissance se poursuit ainsi tous le mois de juillet

a) A quelle date la plante mesurera-t-elle 40 cm ?

b) Quelle est la hauteur atteinte le 31 juillet à midi ?

Que Dieu soit à l'aide de tous

CORRECTION

EXERCICE 01

On considère l'équation différentielle $(E): y' - 2y = xe^x$

1) L'équation différentielle $(E_0): y' - 2y = 0$ est équivalente à $y' = 2y$ donc l'ensemble des solutions de (E_0) est l'ensemble des fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ke^{2x}$ où $k \in \mathbb{R}$

2) Soit a et b deux réels et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)e^x$

a) g est une solution de (E) sur $\mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) - 2g(x) = xe^x$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ ae^x + (ax+b)e^x - 2(ax+b)e^x = xe^x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (a-b)e^x - axe^x = xe^x \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Ainsi la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -(x+1)e^x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$

b) f est une solution de (E) sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = xe^x$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = g'(x) - 2g(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (f-g)'(x) - 2(f-g)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f - g \text{ est une solution de } (E_0) \text{ sur } \mathbb{R}$$

c) f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f - g$ est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - g(x) = ke^{2x}, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = g(x) + ke^x = -(x+1)e^x + ke^{2x}$, où $k \in \mathbb{R}$

3) Soit Ψ la solution de (E) qui s'annule en 0 $\Rightarrow \Psi(0) = 0 \Rightarrow -1 + k = 0 \Rightarrow k = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi(x) = -(x+1)e^x + e^{2x}$

EXERCICE 02

I.1) La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable et strictement positive sur $[0;+\infty[$

Alors La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\forall x \geq 0$ $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$

2) a) $\forall \in x > 0$, $f(x) = x - \ln\left(x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\right) = x - \ln x^2 - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = x - 2\ln x - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

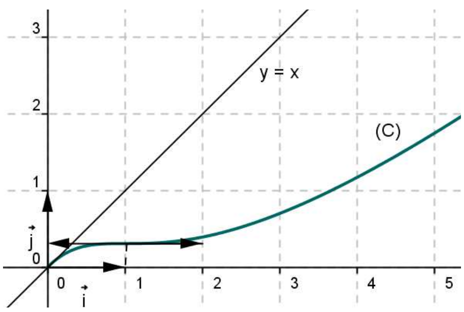
b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) - \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln x - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ Alors (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$

3)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$			$+\infty$



4) a) $\Delta: y = f_d(0)x + f(0) = x$

b) $\forall\ x \in [0;+\infty[$, $f(x) - x = -\ln(1+x^2) \leq 0$ car $1 + x^2 \geq 1$

Donc la courbe (C) est au – dessous de Δ

II. 1) a) • La fonction $u : x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $u\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) = [0;+\infty[$

• La fonction $V : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[= u\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$ Alors la fonction G est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[, G'(x) = u'(x).v\left((u(x)\right) = \left(1+\tan^2 x\right).\frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$

b) On a : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $G'(x) = 1 \Rightarrow \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = x + c$ et comme $G(0) = 0$ alors $c = 0$

Ainsi $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = x$

c) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

2) a) $\forall t \in [0;1]$ On pose: $\begin{cases} \varphi(t) = \ln\left(1+t^2\right) \\ \psi'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \psi(t) = t \end{cases}$

Alors $\int_0^1 \ln\left(1+t^2\right)dt = \left[t\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt = \ln 2 - 2\left(\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\right)$

$$= \ln 2 - 2\left(\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt\right) = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

b) $\mathscr{A} = \int_0^1 |f(t)-t|dt = \int_0^1 (t - f(t))dt = \int_0^1 \ln\left(1+t^2\right)dt = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \ln 2 - 2 + 2\times\frac{\pi}{4} = \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right)$u.a

EXERCICE 03

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$10 \equiv 1(\text{mod}\,3) \Rightarrow 10^n \equiv 1^n(\text{mod}\,3) \Rightarrow 2\times 10^n + 1 \equiv 2\times 1 + 1(\text{mod}\,3) \Rightarrow a_n \equiv 0(\text{mod}\,3)$ donc a_n est divisible par 3

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $10 \equiv -1(\text{mod}\,11) \Rightarrow 2\times 10^n + 1 \equiv 2\times(-1)^n + 1(\text{mod}\,11) \Rightarrow a_n \equiv 2\times(-1)^n + 1(\text{mod}\,11)$

1^er^ Cas : Si n est pair alors $(-1)^n = 1 \Rightarrow a_n \equiv 3(\text{mod}\,11)$ donc 3 est le reste de a_n modulo 11

2^ème^ Cas : Si n est impair alors $(-1)^n = -1 \Rightarrow a_n \equiv -1(\text{mod}\,11) \Rightarrow a_n \equiv 10(\text{mod}\,11)$

Donc 10 est le reste de a_n modulo 11

b) D'après a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \not\equiv 0(\text{mod}\,11)$ (car le reste de a_n par 11 est 3 ou 10)

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, 11 ne divise pas $a_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \wedge 11 = 1$ car 11 est premier

Donc a_n et 11 sont premiers entre eux

3) a) $a_2 = 201$ et $a_2 \times 4 + 11\times(-73) = 804 - 803 = 1$ alors le couple $(4,-73)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

b) (x,y) est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \Rightarrow a_2x + 11y = 1 \Rightarrow 201x + 11y = 1$

$\Rightarrow 201x + 11y = 201\times 4 + 11\times(-73) \Rightarrow 201(x-4) = 11(-y-73)$

$\Rightarrow \begin{cases} 11 \text{ divise } 201(x-4) \\ 201(x-4) = 11(-y-73) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11 \text{ divise} (x-4) \text{ car } 201\wedge 11 = 1 \\ 201(x-4) = 11(-y-73) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11k+4, k\in\mathbb{Z} \\ 201\times 11k = 11(-y-73) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 11k+4, \ k\in\mathbb{Z} \\ y = -201k - 73 \end{cases}$

Réciproquement $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $201(11k+4) + 11(-201k-73) = 201\times 4 + 11\times(-73) = 1$

Alors $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(x,y) = (11k+4\ ;\ -201k-73),\ k\in\mathbb{Z}\}$

4) a) $\text{Aff}(A_n) = z_n = 2e^{i\frac{a_n\pi}{4}} \Rightarrow |z_n| = 2 \Rightarrow OA_n = 2 \Rightarrow A_n$ au cercle de centre O et de rayon 2

b) On a : • $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi a_1}{4}[2\pi] \equiv \frac{21\pi}{4}[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

• $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi a_2}{4}[2\pi] \equiv \frac{201\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\arg(z_n) \equiv \frac{\pi a_n}{4}[2\pi] \equiv \frac{(2\times 10^n+1)\pi}{4}[2\pi]$

En plus $10 \equiv 2(\mathrm{mod}\,4) \Rightarrow 10^n \equiv 2^n(\mathrm{mod}\,4) \Rightarrow 2\times 10^n \equiv 2\times 2^n(\mathrm{mod}\,4) \Rightarrow 2\times 10^n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ car $2\times 2^n = 4\times 2^{n-1}$

$\Rightarrow 2\times 10^n + 1 = 4p+1$ où $p\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{a_n\pi}{4} = p\pi + \frac{\pi}{4}$ avec $p\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{a_n\pi}{4} = 2q\pi + \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{a_n\pi}{4} = (2q+1)\pi + \frac{\pi}{4}$ où $q\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \arg(z_n) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\arg(z_n) \equiv \pi + \frac{\pi}{4}[2\pi] \Rightarrow \arg(z_n) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\arg(z_n) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$u

$\Rightarrow \arg(z_n) \equiv \arg(z_2)[2\pi]$ ou $\arg(z_n) \equiv \arg(z_1)[2\pi]$ et comme $|z_n| = 2 = |z_1| = |z_2|$ alors $z_n = z_2$ ou $z_n = z_1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \{A_1 ; A_2\}$

EXERCICE 04

1) a) D'après les données $p(\bar{D}) = 0,9$; $p(\bar{A}/D) = 0,94$ et $p(A/\bar{D}) = 0,92$

b) $p(A) = p(A\cap D) + p(A\cap\bar{D}) = p(A/D).p(D) + p(A/\bar{D}).p(\bar{D})$

$= \left(1 - p(\bar{A}/D)\right)\left(1 - p(\bar{D})\right) + p(A/\bar{D}).p(\bar{D}) = 0,06\times 0,1 + 0,92\times 0,9 = 0,834$

2) $p(D/A) = \frac{p(D\cap A)}{p(A)} = \frac{p(A\cap D)}{p(A)} = \frac{p(A/D).p(D)}{p(A)} = \frac{0,06\times 0,1}{0,834} \approx 0,007$

3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de stylos présentant un défaut parmi 4 stylos acceptés

Alors X suit la loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = p(D/A) = 0,007$

$\forall k \in \{0;1;2;3;4\}$, $p(X = k) = C_4^k p^k (1-p)^{4-k}$

La probabilité qu'un paquet de 4 stylos contienne au moins un stylo présentant un défaut est

$p(X\geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - C_4^0 p^0 (1-p)^4 = 1 - (0,993)^4 = 0,028$

4) a) $p(T > 10) = \frac{1}{e} \Rightarrow p(T \geq 10) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = e^{-1} \Leftrightarrow -10\lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = 0,1$

b) $p\left((T>15)/(T>10)\right) = \frac{p(\{T>15\}\cap\{T>10\})}{p(T>10)} = \frac{p(T>15)}{p(T>10)} = \frac{e^{-15\lambda}}{e^{-10\lambda}} = e^{-5\lambda} = e^{-0,5} \simeq 0,607$

c) $\forall h > 0$, $p\left((T>10+h)/(T>10)\right) = \frac{p(\{T>10+h\}\cap\{T>10\})}{p(T>10)} = \frac{p(T>10+h)}{p(T>10)} = \frac{e^{-(10+h)\lambda}}{e^{-10\lambda}} = e^{-h\lambda} = p(T>h)$

EXERCICE 05

1) Le coefficient de corrélation linéaire de $(Z;X)$ est $\rho_{ZX} = \frac{\mathrm{cov}(Z.X)}{\sigma_X\sigma_Y} = 0,99$

$\rho_{ZX} = 0,99 > \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors un ajustement affine est justifié

2) a) La droite de régression de Z en X a pour équation avec $a = \frac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\sigma_X^2} = 0,09$ et $b = \bar{Z} - a\bar{X} = 1,8$

Donc $Z = 0,09X + 1,8$

b) On a : $Z = 0,09X + 1,8 \Rightarrow \ln Y = 0.09X + 1,8 \Rightarrow Y = e^{0,05X+1,8} = 6,05e^{0,09X}$

3) a) Si $Y = 40$ alors $6,05e^{0,09X} = 40 \Rightarrow X = \frac{\ln\left(\frac{40}{6,05}\right)}{0,09} \simeq 21$ donc le 21 juillet la plante mesurera 40 cm

b) Si $X = 31$ alors $Y = 6,05e^{0,09\times 31} \simeq 98,5$ Donc la hauteur de la plante atteinte le 31 juillet à midi est environ 98,5 cm