Lycée de Sbeïtla **A – S : 2016 - 2017**

Mathématiques

4ème Maths

SÉRIE D'EXERCICES

Thème : Arithmétiques

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01

I) Pour tout entier n, on pose $a = 5n + 4$ et $b = 3n + 1$

1) Montrer que tout diviseur commun de a et b est un diviseur de 7
2) En déduire suivant les valeurs de n, la valeur de $a \wedge b$
3) Déterminer $a \wedge b$ lorsque $a = 5 \times (2010)^{2009}$ et $b = 3 \times (2010)^{2009} + 1$

II 1) Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $3x - 5y = 1$

2) En déduire les solutions, dans $\mathbb{Z}^2$, des équations
   a) $3x - 5y = 2$
   b) $3x - 5y = 7$ et $x \wedge y = 7$
3) On considère le système $(S) : \begin{cases} 2x + 1 \equiv 0 \pmod 3 \\ 6x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$
   a) Montrer que x est une solution entière de (S) si et seulement si il existe
   $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} 3u - 5v = 2 \\ x = 1 + 3u \end{cases}$
   b) En déduire les solutions entière de (S)
   c) Déterminer la plus petite solution entier naturel x_0 divisible par 7

Exercice 02

On désigne par A l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 2010

1) a) En utilisant le fait que 2011 est un entier premier, montrer que l'équation
   $(E) : 67x + 2011y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$
   b) Vérifier que le couple $(-30;1)$ est une solution particulière de (E)
   c) Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E)
   d) Déduire la valeur de l'entier naturel x inférieur ou égal à 2010 vérifiant
   $67x \equiv 1 \pmod{2011}$ (L'entier trouvé s'appelle l'inverse de 67 modulo 2011)
2) a) Soit a un entier. Montrer que $a^2 \equiv 1 \pmod{2011} \Leftrightarrow a \equiv 1 \pmod{2011}$ ou $a \equiv -1 \pmod{2011}$
   b) En déduire que et 2010 les seuls entiers de A qui sont égaux à leurs inverses
3) Montrer alors que $2010! \equiv 2010 \pmod{2011}$

Exercice 03

1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11
   b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^4 par 11
   c) En déduire que $6^{40} - 1 \equiv 0 \pmod{11}$ et $6^{40} \equiv 1 \pmod 5$
   d) En déduire que $6^{40} - 1$ est divisible par 55
2) a) Montrer que l'équation $(E) : 65x - 40y = 1$ n'admet pas de solutions entières
   b) Montrer que l'équation $(E') : 17x - 40y = 1$ admet au moins une solution entière
   c) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide une solution entière de (E')

d) Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E')

e) Prouver qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1(\bmod 40)$

3) Pour tout entier naturel a

Démontrer que si $a^{17} \equiv b(\bmod 55)$ et si $a^{40} \equiv 1(\bmod 55)$ alors $b^{33} \equiv a(\bmod 55)$

Exercice 04

1) Soit, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E): 4312x - 1755y = 1$

a) Prouver que (E) admet au mois une solution dans $\mathbb{Z}^2$

b) Déterminer une solution particulaire de (E) puis la résoudre dans l'équation $\mathbb{Z}^2$

2) a) Déterminer suivant les valeurs de n les restes modulo10 de 7^n

b) En déduire le chiffre des unités de $N = 2007^{2011}$

3) Soit, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E'): 5x - 7y = 2016$

a) Montrer que si (x, y) est une solution (E') alors x est divisible par 7

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E')

Exercice 05

On considère, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E): 3x - 2y = 5$

1) Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) (On remarque $(5;5)$ est une solution de (E))

2) (x, y) étant une solution de (E). Déterminer la plus petite valeur $x > 2013$ pour laquelle : $y^2 \equiv 15x(\bmod 41)$

Exercice 06

1) On considère l'équation $(E): 8x + 5y = 1$, où (x, y) est un couple d'entiers relatifs

a) Donner une solution particulaire de (E)

b) Résoudre l'équation (E)

2) Soit N un entier naturel tel que il existe un couple de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a) Montrer que le couple $(a; -b)$ est une solution de (E)

b) Quel est le reste, dans la division euclidienne, de N par 40 ?

3) a) Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $8x + 5y = 100$

b) Un groupe composé de garçons et de filles a dépensé 100 dinars dans une salle de jeux
Les garçons ont dépensé 8 dinars chacun et les filles 5 dinars chacune
Combien pouvait-il y avoir de garçons et de filles dans le groupe ?

Exercice 07

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

Soit n un entier naturel non nul

1) On considère, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E): 3x + 7y = 10^{2n}$

a) Déterminer un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$

b) En déduire une solution particulière $(x_0; y_0)$ de l'équation (E)

c) Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E)

2) On considère, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(G): 3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$

a) Montrer que $100^n \equiv 2^n \pmod 7$

b) Démontrer que est $(x;y)$ une solution de (G), dans $\mathbb{Z}^2$, alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod 7$

c) Reproduire et compléter le tableau suivant

d) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7

En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solutions entières

Exercice 08

1) a) Soit a un entier. Déterminer les restes modulo 11 de a^2

b) En déduire que pour tout entier a, $a^2 \not\equiv -1 \pmod{11}$

2) Soient x et y deux entiers naturels tels que 11 divise $(x^2 + y^2)$

a) On suppose que 11 ne divise pas x

i) Montrer qu'il existe un entier u tel que $xu \equiv 1 \pmod{11}$

ii) En déduire que 11 divise $(1 + y^2u^2)$

b) Montrer que si 11 divise $(x^2 + y^2)$ alors 11 divise x et 11 divise y

3) Montrer que la seule solution, dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $x^2 + y^2 = 11z^2$ est le triplet $(0,0,0)$

Exercice 09

On considère, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E): 7x + 11y = 2703$

1) a) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors $y \equiv 2 \pmod 7$

b) Donner alors une solution particulière $(x_0;y_0)$ de (E)

c) Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E)

2) Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, le système : $\begin{cases} 7x + 11y = 2703 \\ x \equiv y \pmod 5 \end{cases}$

3) Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On pose $a \wedge b = d$ et $a \vee b = m$

Déterminer les couples $(a;b)$ qui vérifient $7m + 11d = 2703$

Exercice 10

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3

On considère l'ensemble $A_p = \{1;2;...;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p

Soit a un élément de A_p

1) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$

2) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p

Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$

3)

Le reste modulo 7 de x	0	1	2	3	4	5	6
Le reste modulo 7 de $3x^2$							

Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$

A l'aide des résultats précédents résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$