CONIQUES

I - PARABOLE

Définition

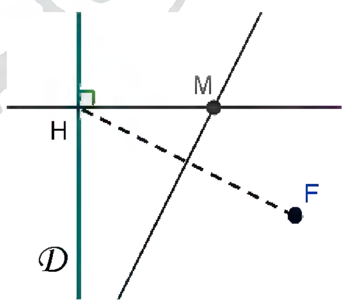
Soit $\mathcal{D}$ une droite et F un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$.
Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.
On appelle parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M tels que $MF = MH$

Vocabulaire

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.

- La perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F est appelé axe focal de la parabole
- La distance du foyer à la directrice est appelée paramètre de la parabole

Construction d'un point d'une parabole



Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$

Pour construire un point de $\mathcal{P}$

- On choisit un point H de la directrice $\mathcal{D}$
- On construit la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par H
- On construit la médiatrice du segment $[FH]$

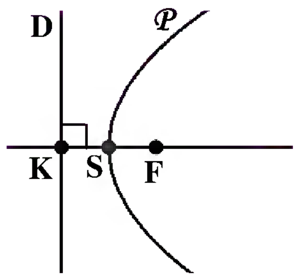
Ces deux droites se coupent en un point M de la parabole $\mathcal{P}$

Remarque

La parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ est l'ensemble des centres des cercles tangents à $\mathcal{D}$ et passant par F

Théorème

- Toute parabole admet comme axe de symétrie son axe focal
- Toute parabole rencontre son axe focal en un unique point appelé sommet de la parabole
- Le sommet d'une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ est le milieu du segment $[FK]$, où K est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$.



Démonstration :

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$.

• Soit M un point du plan, en notant M' son symétrique par rapport à (FK), H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ et H' le projeté orthogonal de M' sur $\mathcal{D}$, alors $H' = S_{(FK)}(H)$ donc $M'H' = MH$

D'autre part : $\left.\begin{array}{l} S_{(FK)}(F) = F \\ S_{(FK)}(M) = M' \end{array}\right\} \Rightarrow MF = M'F$

Par suite $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MH \Leftrightarrow M'F = M'H' \Leftrightarrow M' \in \mathcal{P}$

Donc (FK) est un axe de symétrie de $\mathcal{P}$

• Soit $M \in \mathscr{P} \cap (FK) \Leftrightarrow M \in (FK)$ et $MF = MK \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MK}$ ou $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK}$

Ainsi : $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK} \Leftrightarrow F = K$ ce qu'est impossible car $F \notin \mathscr{D}$.

Alors $M \in \mathscr{P} \cap (FK)$ signifie que $\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MK} \Leftrightarrow M = F * K$

Donc $\mathscr{P}$ coupe (FK) en un unique point M milieu de $[FK]$

1) Equation réduite d'une parabole

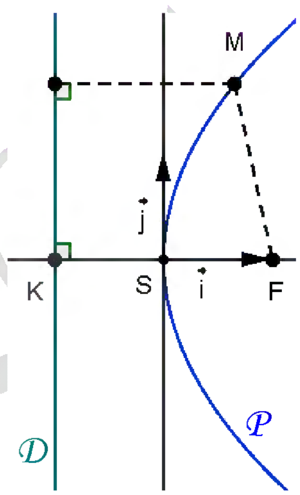
Théorème

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de sommet S, de foyer F et de paramètre p

On munit le plan du repère orthonormé $(S,\vec{i},\vec{j})$, où $\vec{i} = \dfrac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$

La parabole $\mathscr{P}$ a pour équation $y^2 = 2px$, la directrice $\mathscr{D}$ a pour équation $x = -\dfrac{p}{2}$ et le foyer F a pour coordonnées $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$

Réciproquement, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ est la parabole de foyer $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, de directrice la droite d'équation $x = -\dfrac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O



Démonstration

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et de sommet S. On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{D}$ et pose $FK = p$, $\vec{i} = \dfrac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire de sorte que le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$ soit orthonormé

Alors F a pour coordonnées $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ et $\mathscr{D}$ est d'équation $x = -\dfrac{p}{2}$

Soit M un point de coordonnées (x,y) , son projeté orthogonal H sur $\mathscr{D}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{p}{2},y\right)$ Donc $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow MF = MH \Leftrightarrow MF^2 = MH^2 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px$

Vocabulaire

L'équation $y^2 = 2px$ est appelée équation réduite de la parabole $\mathscr{P}$

Autres formes d'équations réduites

Soit p un réel strictement positif

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les ensembles $\mathscr{P} = \{M(x;y) \text{ tels que } y^2 = 2px\}$, $\mathscr{P}' = \{M(x;y) \text{ tels que } y^2 = -2px\}$ et

$\mathscr{P}'' = \{M(x;y) \text{ tels que } x^2 = 2py\}$

On sait que $\mathscr{P}$ est la parabole ouverte à droite de foyer $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, de directrice la droite d'équation $x = -\dfrac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O

• Soit $M(x;y)$ un point de $\mathscr{P}$ et $M'(x';y')$ son symétrique par rapport à l'axe $(O;\vec{j})$ alors :

$$M' = S_{(O;\vec{j})}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x, \ x \geq 0 \\ y' = y \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y'^2 = 2px \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'^2 = -2px' \\ x' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow M' \in \mathcal{P}' \text{ Donc } \mathcal{P}' = S_{(O,\vec{j})}(\mathcal{P})$$

Alors $\mathcal{P}'$ est la parabole ouverte à gauche de foyer $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$, de directrice la droite d'équation $x = \frac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O

- Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{P}$ et $M''(x'';y'')$ son symétrique par rapport à la droite $\Delta : y = x$ alors :

$$M'' = S_{\Delta}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = y \\ y'' = x, \ x \geq 0 \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''^2 = 2py'' \\ y'' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow M'' \in \mathcal{P}''$$

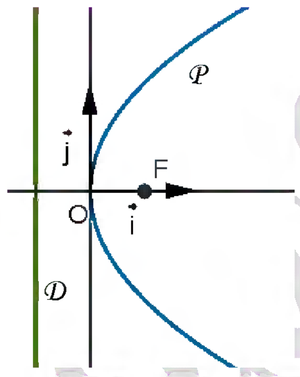
Donc $\mathcal{P}'' = S_{\Delta}(\mathcal{P})$ Alors $\mathcal{P}''$ est la parabole ouverte en haut de foyer $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$, de directrice la droite d'équation $y = -\frac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O

Parabole d'équation réduite $y^2 = 2px$

de foyer $F\left(\frac{p}{2},0\right)$

de directrice $\mathcal{D}$

d'équation $x = -\frac{p}{2}$

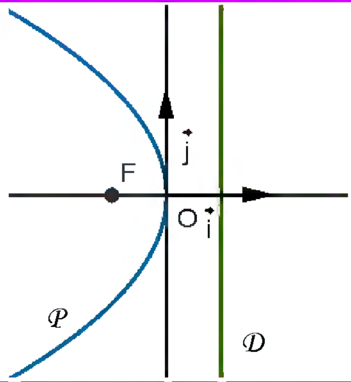


Parabole d'équation réduite $y^2 = -2px$

de foyer $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$

de directrice $\mathcal{D}$

d'équation $x = \frac{p}{2}$

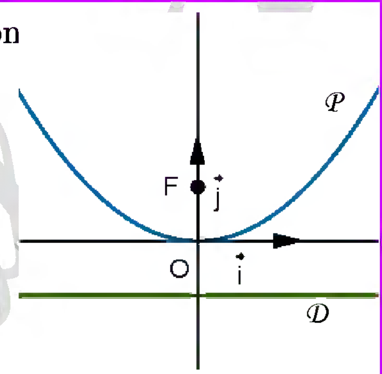


Parabole d'équation réduite $x^2 = 2py$

de foyer $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$

de directrice $\mathcal{D}$

d'équation $y = -\frac{p}{2}$

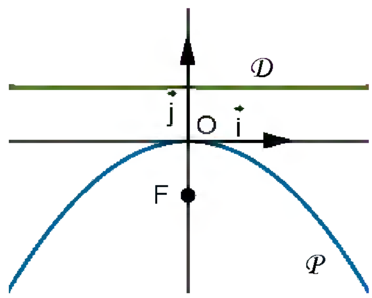


Parabole d'équation réduite $x^2 = -2py$

de foyer $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$

de directrice $\mathcal{D}$

d'équation $y = \frac{p}{2}$



2) Tangentes à une parabole

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit p un réel strictement positif

- Si $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y^2 = 2px$, alors la tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0(x_0,y_0)$ est la droite d'équation $yy_0 = p(x + x_0)$
- Si $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $x^2 = 2py$ alors la tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0(x_0,y_0)$ est la droite d'équation $xx_0 = p(y + y_0)$

Démonstration

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $x^2 = 2py,\ p > 0$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2p}x^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{p}x$

- Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathcal{P}$, alors une équation cartésienne de la tangente (T) à $\mathcal{P}$ en $M_0(x_0,y_0)$ est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{1}{p}x_0(x - x_0) + \frac{1}{2p}x_0^2$

  $\Leftrightarrow (T) : y = \frac{1}{p}x_0x - \frac{1}{p}x_0^2 + \frac{1}{2p}x_0^2 \Leftrightarrow (T) : y = \frac{1}{p}x_0x - \frac{1}{2p}x_0^2 \Leftrightarrow (T) : y = \frac{1}{p}x_0x - y_0$

  $\Leftrightarrow (T) :\ xx_0 = p(y + y_0)$

- Si $\mathcal{P}'$ désigne la parabole d'équation $y^2 = 2px,\ p > 0$ alors $\mathcal{P}' = S_\Delta(\ \mathcal{P}\ )$ où $\Delta : y = x$

  Donc si $M_0(x_0;y_0) \in \mathcal{P}'$ alors $M_0 = S_\Delta(N_0)$ où $N_0(y_0;x_0) \in \mathcal{P}$

  Par suite si (T_0) désigne la tangente en M_0 à $\mathcal{P}'$ alors $T_0 = S_\Delta(T)$ où T est la tangente à $\mathcal{P}$ en N_0 et comme $(T) : xy_0 = p(y + x_0)$

  Donc $M(x;y) \in T_0 \Leftrightarrow N(y;x) \in T \Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0)$. D'où $T_0 : yy_0 = p(x + x_0)$

Remarque :

- Si $\mathcal{P} : y^2 = -2px$, alors la tangente à $\mathcal{P}$ en $M_0(x_0,y_0)$ est $(T) : yy_0 = -p(x + x_0)$
- Si $\mathcal{P}\ : x^2 = -2py$ alors la tangente à $\mathcal{P}$ en $M_0(x_0,y_0)$ est $(T) : xx_0 = -p(y + y_0)$

Conséquence

Soit une parabole d'équation $y^2 = 2px$, dans le repère orthonormé $(S,\vec{i},\vec{j})$, où S est le sommet de la parabole et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs directeurs et unitaires respectif de l'axe focal et de la directrice. Alors sa tangente au sommet a pour équation $x = 0$

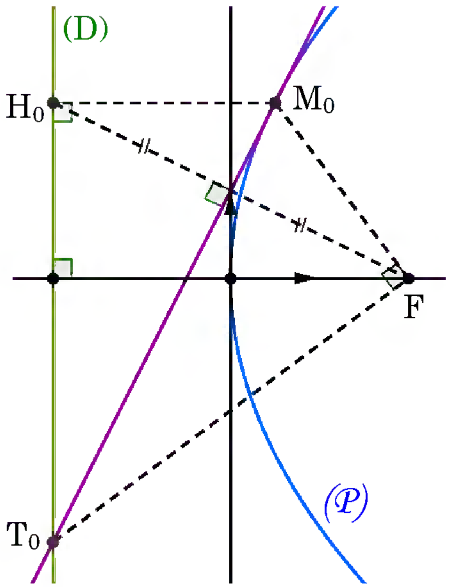
Vocabulaire

La tangente à une parabole en son sommet est appelée tangente au sommet

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F de directrice $\mathcal{D}$, M_0 un point de $\mathcal{P}$, H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$ et (T) la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 alors (T) est la médiatrice de $[FH_0]$

Si (T) rencontre $\mathcal{D}$ en T_0 alors l'angle $\widehat{M_0FT_0}$ est droit



Démonstration

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F de directrice $\mathcal{D}$ et d'équation $y^2 = 2px$,$(p > 0)$

- Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathcal{P}$ distinct de O et H_0 son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.

On désigne par (T) la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} y_0 \\ p \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (T), le point F a pour coordonnés $\left(\frac{p}{2},0\right)$ et le point H_0 a pour coordonnées $\left(-\frac{p}{2},y_0\right)$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{FH_0}\begin{pmatrix} -p \\ y_0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à (T)

L'égalité $M_0H_0 = M_0F$ permet de déduire que M_0 est un point de la médiatrice de $[FH_0]$

Par suite $\left.\begin{matrix} (T) \perp (FH_0) \\ M_0 \in \text{Méd}[FH_0] \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ (T) est la médiatrice de $[FH_0]$

- Dans le cas où $M_0 \neq O$ la tangente (T) à $\mathcal{P}$ en M_0 coupe $\mathcal{D}$ en T_0

Le triangle $M_0H_0T_0$ est rectangle en H_0 et F est le symétrique de H_0 par rapport à (M_0T_0) alors l'angle $\widehat{M_0FT_0}$ est droit

Exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit la courbe $\mathcal{P}$ d'équation : $2x + 3y^2 + 4y - 1 = 0$

1) a) Montrer que $\mathcal{P}$ est une parabole dont on déterminera le sommet S, le foyer F et la directrice D
   b) Construire $\mathcal{P}$

2) Soit M_0 le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse (-3) et d'ordonnée $y_0 \geq 0$
   a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à $\mathcal{P}$ en M_0
   b) Donner une équation de la perpendiculaire (N) à (T) en M_0

3) (T) coupe l'axe focal Δ de $\mathcal{P}$ au point I et (N) coupe Δ en J
   a) Montrer que F est le milieu du segment $[IJ]$
   b) Soit K le projeté orthogonal de M_0 sur Δ. Montrer que $JK = \frac{1}{3}$

Solution

$$M(x,y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2x + 3y^2 + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y\right) - 1 = 0$$

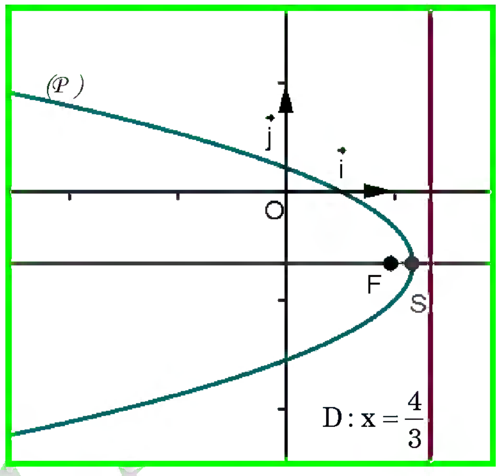
$$\Leftrightarrow 2x + 3\left[\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right] - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + 2x - \frac{7}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = -2x + \frac{7}{3} \Leftrightarrow \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = -2.\frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{6}\right)$$

Posons : $\begin{cases} X = x - \dfrac{7}{6} \\ Y = y + \dfrac{2}{3} \end{cases}$, $S\left(\dfrac{7}{6};-\dfrac{2}{3}\right)$ et considérons le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$ alors $\mathscr{P}$ est d'équation

$Y^2 = -2.\dfrac{1}{3}X$ Il en résulte que $\mathscr{P}$ est une parabole de sommet $S\left(\dfrac{7}{6};-\dfrac{2}{3}\right)$ d'axe focal

$(S,\vec{i}) : Y = 0$ ou encore $(S,\vec{i}) : y = -\dfrac{2}{3}$ et de paramètre $p = \dfrac{1}{3}$



	Dans $(S,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
Foyer	$F\left(-\dfrac{1}{6};0\right)$	$F\left(1;-\dfrac{2}{3}\right)$
Directrice	$X = \dfrac{1}{6}$	$x = \dfrac{4}{3}$

2) a) $M_0(-3;y_0)$, $y_0 \geq 0$ est un point de $\mathscr{P}$, si et seulement

si, $\begin{cases} 3y_0^2 + 4y_0 - 7 = 0 \\ y_0 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y_0 = 1$ donc $M_0(-3;1)$

	Dans $(S,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
M_0	$M_0\left(-\dfrac{25}{6};\dfrac{5}{3}\right)$	$M_0(-3;1)$
(T)	$\dfrac{5}{3}Y = -\dfrac{1}{3}\left(X - \dfrac{25}{6}\right)$ $\Leftrightarrow 6X + 30Y - 25 = 0$	$6\left(x - \dfrac{7}{6}\right) + 30\left(y + \dfrac{2}{3}\right) - 25 = 0$ $\Leftrightarrow 6x + 30y - 12 = 0$

Par conséquent, la tangente (T) à $\mathscr{P}$ en M_0 est d'équation $\Leftrightarrow x + 5y - 2 = 0$

b) Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de (T) donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (N)

$(N) : -5x + y + c = 0$ et comme $M_0 \in (N)$ alors $15 + 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -16$

Donc $(N) : -5x + y - 16 = 0$

2) a) On a $\Delta : y = -\dfrac{2}{3}$

Donc $I(x,y) \in \Delta \cap (T) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y - 2 = 0 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{16}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$ alors $I\left(\dfrac{16}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

$$J(x,y)\in\Delta\cap(N)\Leftrightarrow\begin{cases}-5x+y-16=0\\ y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{10}{3}\\ y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\text{ alors } J\left(-\frac{10}{3};-\frac{2}{3}\right)$$

Le milieu de $[IJ]$ a pour coordonnées $\left(1;-\frac{2}{3}\right)$ qui n'est autre que le foyer F de $\mathcal{P}$

b) Soit K le projeté orthogonale de M_0 sur Δ alors $k\left(-3;-\frac{2}{3}\right)$

Par suite $JK=\left|-3-\left(-\frac{10}{3}\right)\right|=\frac{1}{3}$

II - HYPERBOLE

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite, F un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$ et un réel $e>1$
Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$
On appelle hyperbole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$. et d'excentricité e l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH}=e$

Construction d'un point d'une hyperbole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e
On désigne par S le barycentre des points pondéré $(F,1)$ et (K,e) et par K est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$

On a : $\frac{SF}{SK}=e\Rightarrow S\in\mathcal{H}$

Soit (C) le cercle de centre S et passant par F et B un point de (C) distinct de F
La droite (BF) coupe $\mathcal{D}$ en I
On désigne par h l'homothétie de centre I qui envoie B sur F, M l'image de S par h et par H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$

Alors on a : $\begin{cases}h(S)=M\\ (SK)\parallel(MH)\end{cases}\Rightarrow h((SK))=(MH)$

Donc $h(K)=h\big((IK)\cap(SK)\big)=(IK)\cap(MH)=H$

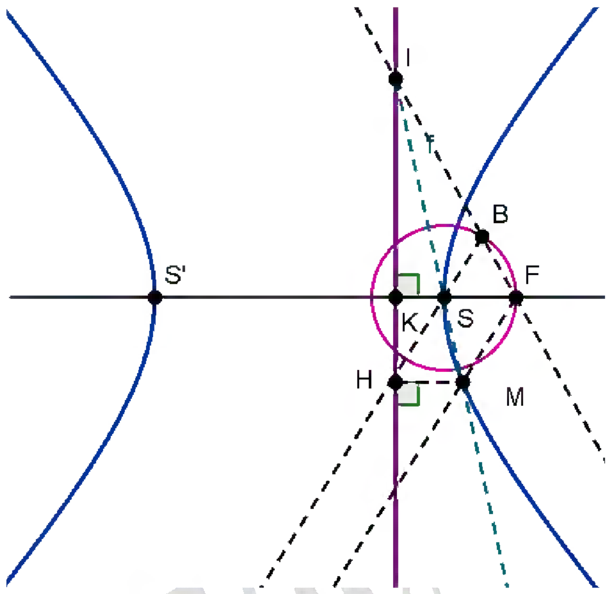
Si α désigne le rapport de h alors $\begin{cases}h(B)=F\\ h(S)=M\\ h(K)=H\end{cases}\Rightarrow MH=|\alpha|SK$ et $MF=|\alpha|SB$

Donc $\frac{MF}{MH}=\frac{|\alpha|SB}{|\alpha|SK}=\frac{SB}{SK}=\frac{SF}{SK}=e\Rightarrow M\in\mathcal{H}$

Donc pour construire un point de $\mathcal{H}$

- On construit le point S barycentre des points pondéré $(F,1)$ et (K,e) où K est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$
- On trace le cercle (C) de centre S passant F
- On choisit un point B sur le cercle (C) autre que F
- On trace la droite (FB) qui coupe la directrice $\mathcal{D}$ un point I
- On construit la parallèle à (BS) passant par F.

Cette droite coupe (IS) en un point M de l'hyperbole



Vocabulaire

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$

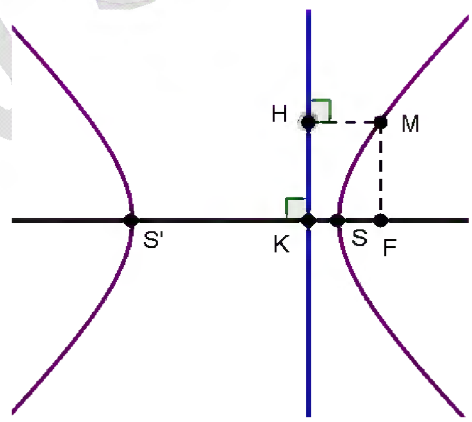
La perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F est appelé axe focal de l'hyperbole

Théorème

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

- L'axe focal de $\mathcal{H}$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{H}$
- $\mathcal{H}$ rencontre son axe focal en deux points S et S'

appelés sommets de l'hyperbole et ils sont les barycentres respectifs des points $(F;1)$, $(K;e)$ et $(F;1)$, $(K;-e)$ où K est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$



Démonstration :

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$.

- Soit M un point du plan, en notant M' son symétrique par rapport à (FK) , H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ et H' le projeté orthogonal de M' sur $\mathcal{D}$, alors $H' = S_{(FK)}(H)$ donc $M'H' = MH$

$$\text{D'autre part: } \left.\begin{array}{l} S_{(FK)}(F) = F \\ S_{(FK)}(M) = M' \end{array}\right\} \Rightarrow MF = M'F$$

Par suite $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow MF = eMH \Leftrightarrow M'F = eM'H' \Leftrightarrow M' \in \mathcal{H}$ donc (FK) est un axe de symétrie de $\mathcal{H}$

- Soit $M \in \mathcal{H} \cap (FK) \Leftrightarrow M \in (FK)$ et $MF = eMK \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} = -e\overrightarrow{MK}$ ou $\overrightarrow{MF} = e\overrightarrow{MK}$

Donc $M \in \mathcal{H} \cap (FK) \Leftrightarrow$ M est le barycentre des points pondérés $(F,1)$ (K,e) ou M est le barycentre des points pondérés $(F,1)$ $(K,-e)$

Par suite $\mathcal{H}$ rencontre son axe focal en deux points

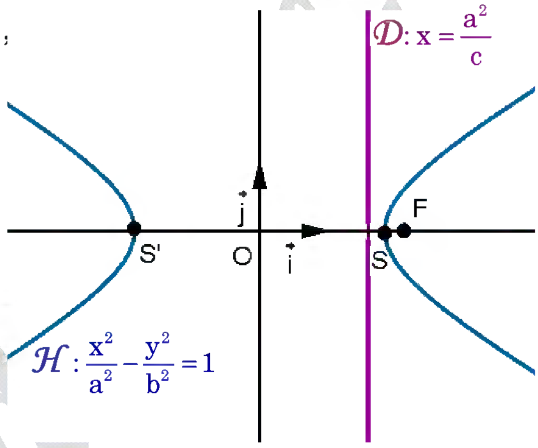
1) Equation réduite d'une hyperbole

Théorème

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, de sommets S et S'

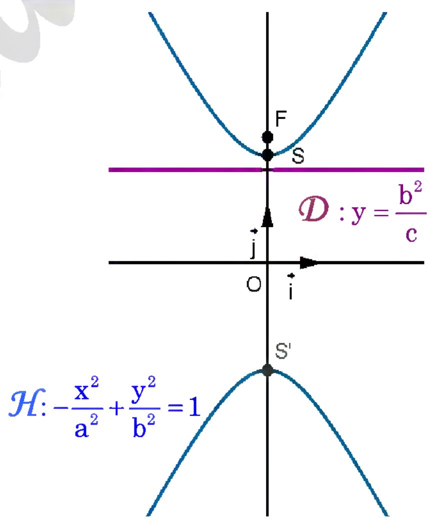
On désigne par O le milieu de $[SS']$, on pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$, directeur de $\mathcal{D}$

Si S a pour coordonnées $(a;0)$ et F a pour coordonnées $(c,0)$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ alors l'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b^2 = c^2 - a^2$



Réciproquement, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ est une Hyperbole de centre O, de foyer $F(\sqrt{a^2+b^2};0)$ de directrice d'équation $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ et de sommets $S(a;0)$ et $S'(-a;0)$

Pour des raisons de symétries par rapport à la droite $\Delta : y = x$ la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole de centre O, de foyer $F(0;\sqrt{a^2+b^2})$, de directrice la droite d'équation $y = \frac{b^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{b}$ avec $c = \sqrt{a^2+b^2}$ et de sommets $S(0;b)$ et $S'(0;-b)$



Démonstration

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$ et on note S et S' les sommets de $\mathcal{H}$ et O le milieu de $[SS']$

S est le barycentre des points pondérés $(F;1)$, $(K;e) \Leftrightarrow \overrightarrow{SF} + e\overrightarrow{SK} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{SO} + e\overrightarrow{OK} = \vec{0} \qquad (*)$$

S' est le barycentre des points pondérés $(F;1)$, $(K;-e) \Leftrightarrow \overrightarrow{S'F} - e\overrightarrow{S'K} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{S'O} + \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{S'O} - e\overrightarrow{OK} = \vec{0} \qquad (**)$$

(*) et (**) $\Rightarrow 2\overrightarrow{OF} + e(\overrightarrow{SO} - \overrightarrow{S'O}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OF} + e(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OS'}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OF} + 2e\overrightarrow{SO} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{SO} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OS}$$

Ainsi $\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OF}+e\overrightarrow{SO}+e\overrightarrow{OK}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{SO}+e\overrightarrow{OK}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{OK}=\frac{1}{e}\overrightarrow{OS}$

On pose $\vec{i}=\frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ de sorte que le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ soit orthonormé. On désigne par $(c;0)$ les coordonnées de F et $(a;0)$ celle de S

$\overrightarrow{OF}=e\overrightarrow{OS} \Rightarrow OF=eOS \Rightarrow e=\frac{OF}{OS}=\frac{c}{a} \quad ; \quad \overrightarrow{OK}=\frac{1}{e}\overrightarrow{OS} \Rightarrow OK=\frac{1}{e}OS \Rightarrow OK=\frac{a}{e} \Rightarrow OK=\frac{a^2}{c}$

Soit M un point de coordonnées $(x;y)$, si H désigne son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ alors H a pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{c};y\right)$

Donc $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow MF=eMH \Leftrightarrow MF^2=e^2MH^2 \Leftrightarrow (x-c)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2$

$$\Leftrightarrow x^2-2xc+c^2+y^2=e^2\left(x^2-2x\frac{a^2}{c}+\frac{a^4}{c^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2xc+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

Donc $\mathcal{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $b^2=c^2-a^2$

Vocabulaire

L'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ est appelée équation réduite de l'hyperbole

Cette équation ne change pas si l'on change x en $-x$ ou y en $-y$. On en déduit

Théorème

- Toute hyperbole admet un centre de symétrie qui est le milieu de ses sommets
Ce centre de symétrie est appelée centre de l'hyperbole
- Toute hyperbole admet deux axes de symétries qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice et passant par le centre de symétrie

Conséquence

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$

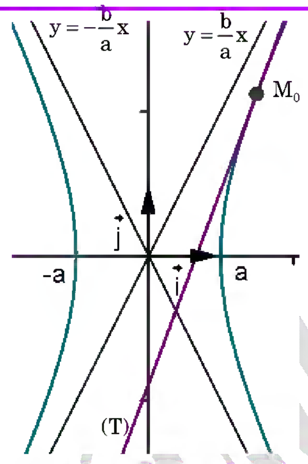
Le fait que l'hyperbole $\mathcal{H}$ admet un centre de symétrie implique l'existence d'une autre directrice $\mathcal{D}'$ et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de $\mathcal{D}$ et F

On dit que F est le foyer associé à la directrice $\mathcal{D}$ et F' est le foyer associée à la directrice $\mathcal{D}'$

2) Tangente à une hyperbole et asymptotes à une hyperbole

Théorème

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Alors $\mathcal{H}$ admet deux asymptotes d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$
La tangente à $\mathcal{H}$ en $M(x_0,y_0)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$



Démonstration

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ où a et b sont deux réels strictement positifs

1) $M(x;y)\in \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)$

$$\Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \text{ ou } y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \text{ , avec } |x|\geq a$$

Si on désigne par $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur $]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[$ par $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ et $g(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=-f(x)$ alors :

$M(x;y)\in \mathcal{H} \Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ ou $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$,avec $|x|\geq a \Leftrightarrow y=f(x)$ ou $y=g(x)$

$$\Leftrightarrow M\in \mathcal{H}_1 \text{ ou } M\in \mathcal{H}_2$$

Donc $\mathcal{H}=\mathcal{H}_2\cup\mathcal{H}_1$

2) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b|x|\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{ax}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{a}=\frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\frac{b}{a}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0$$

Alors la droite d'équation $y=\frac{b}{a}x$ est une asymptote à $\mathcal{H}_1$ au voisinage de $+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{b|x|\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-b\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{a}=-\frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+\frac{b}{a}x=\lim_{x\to-\infty}\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{b}{a}x=\lim_{x\to-\infty}\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}-x}=0$$

Alors la droite d'équation $y=-\frac{b}{a}x$ est une asymptote à $\mathcal{H}_1$ au voisinage de $-\infty$

De même

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-b\sqrt{x^2-a^2}}{ax}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-b|x|\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{ax}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-b\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{a}=-\frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)+\frac{b}{a}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-b}{a}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{b}{a}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0$$

Alors la droite d'équation $y=-\frac{b}{a}x$ est une asymptote à $\mathcal{H}_2$ au voisinage de $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-b\sqrt{x^2-a^2}}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-b|x|\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{b\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{a}=\frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)-\frac{b}{a}x=\lim_{x\to-\infty}-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x=\lim_{x\to-\infty}-\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}-x}=0$$

Alors la droite d'équation $y=\frac{b}{a}x$ est une asymptote à $\mathcal{H}_2$ au voisinage de $-\infty$

<u>Conclusion</u> : les droites d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$ sont des asymptotes $\mathcal{H}$

3) Soit $M(x_0,y_0)$ un point de $\mathcal{H}$ et (T) la tangente à $\mathcal{H}$ en M

$\mathcal{H}$ a pour sommets $S(a;0)$ et $S'(-a;0)$

• Si $M=S$ alors $\mathcal{H}$ admet une tangente verticale en M car f et g ne sont pas dérivables à droite en a donc $(T):x=a$

• Si $M=S'$ alors $\mathcal{H}$ admet une tangente verticale en M car f et g ne sont pas dérivables à gauche en $-a$ donc $(T):x=-a$

• Supposons que $M\in\mathcal{H}_1\setminus\{S,S'\}$

f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;-a[$ et $]a;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{b}{a}.\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

Donc la tangente (T) à $\mathcal{H}_1$ en en M a pour équation $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\Leftrightarrow (T): y=\frac{b}{a}.\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-a^2}}(x-x_0)+f(x_0)$ et comme $y_0=\frac{b}{a}.\sqrt{x_0^2-a^2}$ alors $\sqrt{x_0^2-a^2}=\frac{a}{b}y_0$

Donc $\Leftrightarrow (T): y=\frac{b}{a}.\frac{x_0}{\frac{a}{b}y_0}(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow (T): yy_0=\frac{b^2}{a^2}.x_0(x-x_0)+y_0^2$

$$\Leftrightarrow (T): yy_0=\frac{b^2}{a^2}.x_0(x-x_0)+\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2) \Leftrightarrow (T): yy_0=\frac{b^2}{a^2}.x_0x-\frac{b^2}{a^2}x_0^2+\frac{b^2}{a^2}x_0^2-b^2$$

$$\Leftrightarrow (T): yy_0=\frac{b^2}{a^2}.x_0x-b^2 \Leftrightarrow (T): \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

• De même si $M\in\mathcal{H}_2\setminus\{S,S'\}$ la tangente (T) à $\mathcal{H}_2$ en M a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$

En plus cette relation reste vérifiée si $x_0 = a$ et $y_0 = 0$ ou $x_0 = -a$ et $y_0 = 0$

Conclusion : $\forall M(x_0,y_0) \in \mathcal{H}$ la tangente (T) à $\mathcal{H}$ en M a pour équation $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Remarque

Pour des raisons de symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ la tangente à l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en $M(x_0,y_0)$ a pour équation $-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Vocabulaire

On dit qu'une hyperbole est équilatère si ses asymptotes sont perpendiculaires

3) Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

Théorème

Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a une équation de la forme XY = k où k est un réel non nul

Démonstration

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Les asymptotes de $\mathcal{H}$ sont $\Delta : y = -\frac{b}{a}x$ et $\Delta' : y = \frac{b}{a}x$ donc le vecteur $\vec{u} = a\vec{i} - b\vec{j}$ est un vecteur directeur de Δ et le vecteur $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ est un vecteur directeur de Δ'

Soit M un point de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Si on désigne par (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ alors :

$$\begin{cases} \vec{u} = a\vec{i} - b\vec{j} \\ \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{2a}(\vec{u} + \vec{v}) \\ \vec{j} = \frac{1}{2b}(\vec{v} - \vec{u}) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \frac{x}{2a}(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{y}{2b}(\vec{v} - \vec{u}) = \left(\frac{x}{2a} - \frac{y}{2b}\right)\vec{u} + \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b}\right)\vec{v} = X\vec{u} + Y\vec{v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \frac{x}{2a} - \frac{y}{2b} \\ Y = \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} \end{cases}$$

Donc $M(x,y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1 \Leftrightarrow 2X.2Y = 1 \Leftrightarrow XY = \frac{1}{4}$

Alors $\mathcal{H}$ a pour équation $XY = \frac{1}{4}$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

III - ELLIPSE

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite et F un point n'appartient pas à $\mathcal{D}$ et e un réel tel que : $0 < e < 1$

Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$

On appelle ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$

Vocabulaire

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$

La perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F est appelée axe focal de cette ellipse

Construction d'un point d'une ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

On désigne par S le barycentre des points pondéré $(F,1)$ et (K,e) et par K est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$

On a : $\dfrac{SF}{SK} = e \Rightarrow S \in \mathcal{E}$

Soit (C) le cercle de centre S et passant par F et B un point de (C) distinct de F

La droite (BF) coupe $\mathcal{D}$ en I

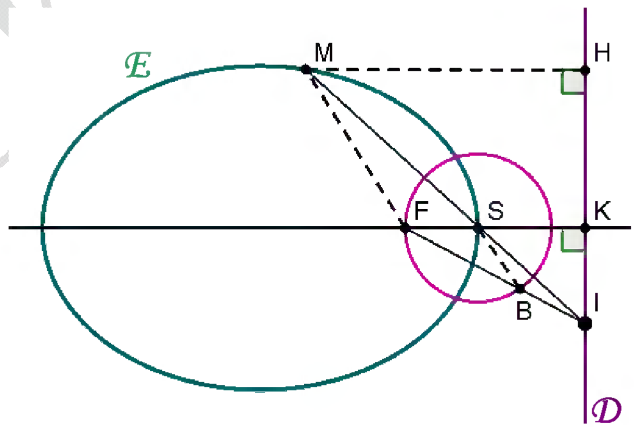
On désigne par h l'homothétie de centre I qui envoie B sur F, M l'image de S par h et par H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$

Alors on a : $\begin{cases} h(S) = M \\ (SK) \parallel (MH) \end{cases} \Rightarrow h((SK)) = (MH)$

Donc $h(K) = h\big((IK) \cap (SK)\big) = (IK) \cap (MH) = H$

Si α désigne le rapport de h alors $\begin{cases} h(B) = F \\ h(S) = M \\ h(K) = H \end{cases} \Rightarrow MH = |\alpha| SK$ et $MF = |\alpha| SB$

Donc $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{|\alpha| SB}{|\alpha| SK} = \dfrac{SB}{SK} = \dfrac{SF}{SK} = e \Rightarrow M \in \mathcal{E}$



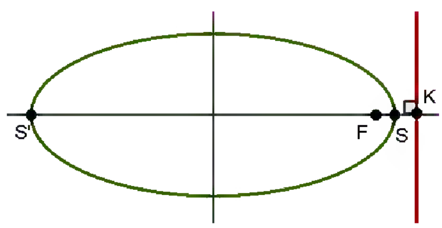
Donc pour construire un point de $\mathcal{E}$

- On construit le point S barycentre des points pondéré $(F,1)$ et (K,e) où K est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$
- On trace le cercle (C) de centre S passant F
- On choisit un point B sur le cercle (C) autre que F
- On trace la droite (FB) qui coupe la directrice $\mathcal{D}$ un point I
- On construit la parallèle à (BS) passant par F.

Cette droite coupe (IS) en un point M de l'ellipse

Théorème

> Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e
>
> L'axe focal de $\mathcal{E}$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{E}$
>
> $\mathcal{E}$ rencontre son axe focal en deux points appelés sommets principaux de l'ellipse et ils sont les barycentres respectifs des points $(F,1),(K,e)$ et $(F,1)$, $(K,-e)$ où K est le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$



Démonstration :

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$.

• Soit M un point du plan, en notant M' son symétrique par rapport à (FK), H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ et H' le projeté orthogonal de M' sur $\mathcal{D}$, alors $H' = S_{(FK)}(H)$ donc $M'H' = MH$

$$\text{D'autre part: } \left.\begin{array}{l} S_{(FK)}(F) = F \\ S_{(FK)}(M) = M' \end{array}\right\} \Rightarrow MF = M'F$$

Par suite $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF = eMH \Leftrightarrow M'F = eM'H' \Leftrightarrow M' \in \mathcal{E}$ donc (FK) est un axe de symétrie de $\mathcal{E}$

• Soit $M \in \mathcal{E} \cap (FK) \Leftrightarrow M \in (FK)$ et $MF = eMK \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} = -e\overrightarrow{MK}$ ou $\overrightarrow{MF} = e\overrightarrow{MK}$

Donc $M \in \mathcal{E} \cap (FK) \Leftrightarrow M$ est le barycentre des points pondérés $(F,1)$ (K,e) ou M est le barycentre des points pondérés $(F,1)$ $(K,-e)$

Par suite $\mathcal{E}$ rencontre son axe focal en deux points

1) Equation réduite d'une ellipse

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$ et on note S et S' les sommets de $\mathcal{E}$ et O le milieu de $[SS']$

S est le barycentre des points pondérés $(F;1)$, $(K;e) \Leftrightarrow \overrightarrow{SF} + e\overrightarrow{SK} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{SO} + e\overrightarrow{OK} = \vec{0} \qquad (*)$$

S' est le barycentre des points pondérés $(F;1)$, $(K;-e) \Leftrightarrow \overrightarrow{S'F} - e\overrightarrow{S'K} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{S'O} + \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{S'O} - e\overrightarrow{OK} = \vec{0} \qquad (**)$$

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow 2\overrightarrow{OF} + e(\overrightarrow{SO} - \overrightarrow{S'O}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OF} + e(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OS'}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OF} + 2e\overrightarrow{SO} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{SO} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OS}$$

Ainsi $\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{SO} + e\overrightarrow{OK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{SO} + e\overrightarrow{OK} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{1}{e}\overrightarrow{OS}$

On pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ de sorte que le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ soit orthonormé. On désigne par $(c;0)$ les coordonnées de F et $(a;0)$ celle de S

$$\overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OS} \Rightarrow OF = eOS \Rightarrow e = \frac{OF}{OS} = \frac{c}{a} \quad ; \quad \overrightarrow{OK} = \frac{1}{e}\overrightarrow{OS} \Rightarrow OK = \frac{1}{e}OS \Rightarrow OK = \frac{a}{e} \Rightarrow OK = \frac{a^2}{c}$$

Soit M un point de coordonnées $(x;y)$, si H désigne son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ alors H a pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{c};y\right)$

Donc $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF = eMH \Leftrightarrow MF^2 = e^2MH^2 \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$

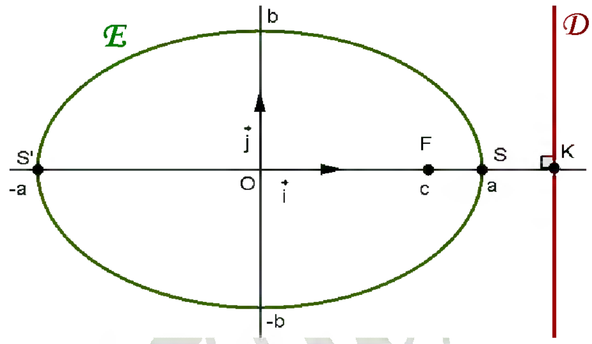
$$\Leftrightarrow x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - 2x\frac{a^2}{c} + \frac{a^4}{c^2}\right) \Leftrightarrow x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2xc + a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Théorème

Soit $\mathcal{E}$ une hyperbole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, de sommets S et S'
On désigne par O le milieu de $[SS']$.

On pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ de sorte que le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ soit orthonormé
Si S a pour coordonnées $(a;0)$ et F a pour coordonnées $(c,0)$ alors $\mathcal{E}$ a pour équation
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $b^2=a^2-c^2$



Cette équation est appelé équation réduite de $\mathcal{E}$

L'équation précédente ne change pas si l'on change x en $-x$ ou y en $-y$
On en déduit

Théorème

- Toute ellipse admet un centre de symétrie qui est le milieu du segment formé par ses sommets principaux
Ce centre de symétrie est appelée centre de l'ellipse
- Toute ellipse admet deux axes de symétries qui sont l'axe focal et la droite perpendiculaire à l'axe focal en son centre

Vocabulaire

La perpendiculaire à l'axe focal d'une ellipse en son centre coupe cette ellipse en deux points appelés sommets secondaires

Conséquence

Soit $\mathcal{E}$ une hyperbole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$
Le fait que l'ellipse $\mathcal{E}$ admet un centre de symétrie implique l'existence d'une autre directrice $\mathcal{D}'$ et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de $\mathcal{D}$ et F par rapport au centre de l'ellipse
On dit que F est le foyer associé à la directrice $\mathcal{D}$ et F' est le foyer associée à la directrice $\mathcal{D}'$

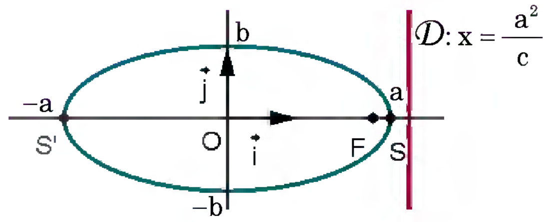
Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

- Soit $a < b$ deux réels strictement positifs

L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que

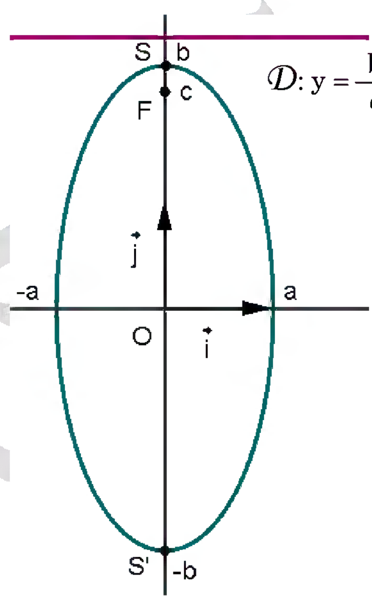
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ est une ellipse de centre O, de foyer $F\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ de directrice associé la droite d'équation $x=\dfrac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e=\dfrac{c}{a}$ où $c=\sqrt{a^2-b^2}$



- Soit $a > b$ deux réels strictement positifs

L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ est une ellipse de centre O , de foyer $F\left(0,\sqrt{b^2-a^2}\right)$ de directrice associé la droite d'équation $y=\dfrac{b^2}{c}$ et d'excentricité $e=\dfrac{c}{b}$ où $c=\sqrt{b^2-a^2}$



2) Tangente à une ellipse

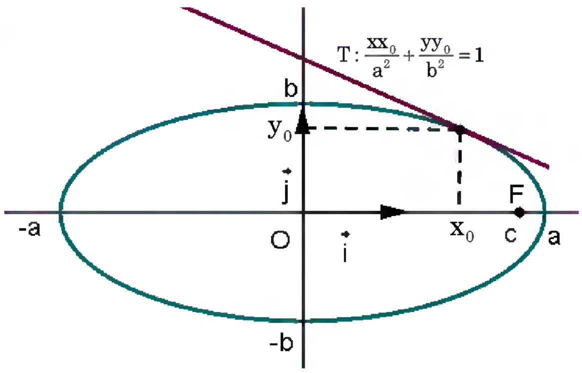
Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,$a>0, b>0$

Alors la tangente (T) à $\mathcal{E}$ en $M(x_0,y_0)$ a pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$



Démonstration

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ où a et b sont deux réels strictement positifs

1) $M(x;y)\in \mathcal{E} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2=\dfrac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$

$$\Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ ou } y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ , avec } |x|\le a$$

Si on désigne par $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur $[-a;a]$ par $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ et $g(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=-f(x)$ alors :

$M(x;y)\in \mathcal{E} \Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ou $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,avec $|x|\le a \Leftrightarrow y=f(x)$ ou $y=g(x)$

$\Leftrightarrow M\in \mathcal{E}_1$ ou $M\in \mathcal{E}_2$

Donc $\mathcal{E}=\mathcal{E}_2\cup \mathcal{E}_1$

3) Soit $M(x_0,y_0)$ un point de $\mathcal{E}$ et (T) la tangente à $\mathcal{E}$ en M

Soit $S(a;0)$ et $S'(-a;0)$

• Si $M=S$ alors $\mathcal{E}$ admet une tangente verticale en M car f et g ne sont pas dérivables à gauche en a donc $(T):x=a$

• Si $M=S'$ alors $\mathcal{E}$ admet une tangente verticale en M car f et g ne sont pas dérivables à droite en $-a$ donc $(T):x=-a$

• Supposons que $M\in \mathcal{E}_1\setminus\{S,S'\}$

f est dérivable sur $]-a;a[$ et $f'(x)=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$

Donc la tangente (T) à $\mathcal{E}_1$ en en M a pour équation $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\Leftrightarrow (T):y=\frac{-bx_0}{a\sqrt{a^2-x_0^2}}(x-x_0)+f(x_0)$ et comme $y_0=\frac{b}{a}.\sqrt{a^2-x_0^2}$ alors $\sqrt{a^2-x_0^2}=\frac{a}{b}y_0$

Donc $\Leftrightarrow (T):y=\frac{-bx_0}{a.\frac{a}{b}y_0}(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow (T):yy_0=-\frac{b^2}{a^2}.x_0(x-x_0)+y_0^2$

$$\Leftrightarrow (T):yy_0=-\frac{b^2}{a^2}.x_0(x-x_0)+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_0^2)\Leftrightarrow (T):yy_0=-\frac{b^2}{a^2}.x_0x+\frac{b^2}{a^2}x_0^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2+b^2$$

$$\Leftrightarrow (T):yy_0=-\frac{b^2}{a^2}.x_0x+b^2\Leftrightarrow (T):\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

• De même si $M\in \mathcal{E}_2\setminus\{S,S'\}$ la tangente (T) à $\mathcal{E}_2$ en M a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

En plus cette relation reste vérifiée si $x_0=a$ et $y_0=0$ ou $x_0=-a$ et $y_0=0$

<u>Conclusion</u> : $\forall M(x_0,y_0)\in \mathcal{E}$ la tangente (T) à $\mathcal{E}$ en M a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

Exercice

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$; on considère la courbe ζ d'équation: $3x^2+4y^2+6x-9=0$

1) Montrer que ζ est une ellipse dont on précisera l'excentricité e, le centre Ω, les foyers F et F' et les directrices associées D et D'

2) a) Déterminer les points d'intersection de ζ et l'axe des ordonnées
(On désigne par M_1 le point d'ordonnée positive)

b) Déterminer les sommets de ζ puis la tracer

3) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à ζ en M_1

b) Soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs de F et F' sur (T)
Montrer que $FH.F'H'=3$

Solution

1) $M \in \zeta \Leftrightarrow 3x^2+4y^2+6x-9=0 \Leftrightarrow 3(x^2+2x)+4y^2=9 \Leftrightarrow 3(x+1)^2-3+4y^2-9=0$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)^2+4y^2=12 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \text{ où}$$

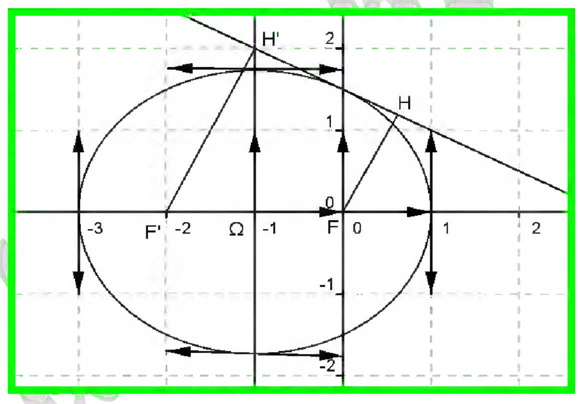
Soit $\Omega(-1;0)$; $X=x+1$; $Y=y$; $a=2$ et $b=\sqrt{3}$

Alors ζ a pour équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ donc ζ est une ellipse d'excentricité $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, centre $\Omega(-1;0)$, de foyers $F(1:0)$ et $F'(-1;0)$

De directrices associées respectives $D: X=4$ et $D': X=-4$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$

2) a) $\zeta \cap (oy)=\left\{M_1(0;\frac{3}{2})\ ;\ M_2(0;-\frac{3}{2})\right\}$

b) ζ a pour sommets principaux $S(2;0)$ et $S'(-2;0)$ et sommets secondaires $B(0;\sqrt{3})$ et $B'(0;-\sqrt{3})$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$



3) a) La tangente (T) à ζ en M_1 a pour équation $X+2Y-4=0$ dans $(\Omega;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$

b) $FH.F'H'=d(F;(T)).d(F';(T))=\frac{|-3|}{\sqrt{5}}.\frac{|-5|}{\sqrt{5}}=3$

IV - EQUATIONS NON RÉDUITES DES CONIQUES

Soit $\mathcal{D}$ une droite et F un point n'appartient pas à $\mathcal{D}$ et un réel $e>0$

Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$

On appelle conique $\mathcal{C}$ d'excentricité e, de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M

tels que $MF=eMH$

Si $e=1$, $\mathcal{C}$ est une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$

Si $e>1$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

Si $e<1$, $\mathcal{C}$ est une ellipse de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$, l'ensemble des point $M(x,y)$ du plan tels que $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ où A, B, C, D et E sont des réels est une courbe dont la nature est donnée par le tableau suivant :

AB	Courbe
$AB=0$	Parabole ou deux droites parallèles ou une droite ou le vide
$AB<0$	Hyperbole ou deux droites sécantes
$AB>0$	Ellipse ou cercle ou un point ou le vide