SUITES RÉELLES

Dans tout ce qui suit $I = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}, n_0 \in \mathbb{N}$

I - RAPPELS ET COMPLÉMENTS

1) Suite arithmétique

Définition

Soit (u_n) une suite réelle définie sur I .On dit que (u_n) est une suite arithmétique s'il existe une constante réelle r telle que pour tout $n \in I$, $u_{n+1} = u_n + r$
On dit dans ce cas que (u_n) est une suite arithmétique de raison r

Conséquences

Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
- Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ on a : $u_p = u_q + (p-q)r$
- Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $p < q$ on a : $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_q = \dfrac{q-p+1}{2}(u_p + u_q)$

Exercice

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 4}{n+1}, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$

1) Montrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = nu_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme
2) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n

Solution

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n = nu_n + 4 - nu_n = 4 \Rightarrow (v_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $v_1 = 1.u_1 = 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 + (n-1)r = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$ et $u_n = \dfrac{v_n}{n} = \dfrac{4n-3}{n}$

2) Suite géométrique

Définition

Soit (u_n) une suite réelle définie sur I .On dit que (u_n) est une suite géométrique s'il existe une constante réelle q telle que pour tout $n \in I$, $u_{n+1} = qu_n$
On dit dans ce cas que (u_n) est une suite géométrique de raison q

Conséquences

Soit (u_n) est une suite géométrique de raison non nul q et de premier terme u_0

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n . u_0$
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = q^{n-p} u_p$
- Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $p < n$, $u_p + u_{p+1} + ... + u_n = \begin{cases} (n-p+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_p\left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right) & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{n'existe pas si } q \leq -1 \end{cases}$

Exercice

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n - 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 6$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

3) Calculer, en fonction de n, la somme $S = \sum_{n}^{2n} u_k$

Solution

1) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2} u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2} u_n + 3 = \frac{1}{2}(u_n + 6) = \frac{1}{2} v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 7$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n = 7.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n - 6 = 7.\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$

3) $$S = \sum_{n}^{2n} u_k = \sum_{n}^{2n}(v_k - 6) = \sum_{n}^{2n} v_k - 6(2n - n + 1) = v_n\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) - 6(n+1)$$

Donc $S = 14.\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 6(n+1)$

3) Convergence et divergence d'une suite

Définition

Soit (u_n) est une suite réelle définie sur I et l un nombre réel

On dit que la suite (u_n) tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si

$\forall \varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

On note dans ce cas $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ ou tout simplement $\lim u_n = l$

Remarques

- Si une suite (u_n) admet une limite finie l alors cette limite est unique
- On dit que la suite (u_n) est **convergente** pour exprimer qu'elle tend vers une limite finie quand n tend vers $+\infty$
- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente** (admet une limite infinie ou n'admet pas de limite)

Définition

- On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ et on note $\lim u_n = +\infty$ si pour tout réel $A > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I, n \geq p \Rightarrow u_n > A$
- On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ et on note $\lim u_n = -\infty$ si pour tout réel $A < 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I, n \geq p \Rightarrow u_n < A$

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle et l fini ou infini

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, si et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$

Démonstration

Supposons d'abord que l est fini

Montrons que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$

Soit $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Et puisque $\forall n \in I, 2n+1 > 2n > n$ alors : $n \geq p \Rightarrow \begin{cases} |u_{2n} - l| < \varepsilon \\ |u_{2n+1} - l| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$

Réciproquement : Montrons que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Soit $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l \Rightarrow \exists\, p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p_1 \Rightarrow |u_{2n} - l| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l \Rightarrow \exists\, p_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - l| < \varepsilon$

Soient $p = \sup(2p_1, 2p_2 + 1)$ et $m \in I$ alors deux cas peuvent se présenter

- $m = 2n$

$m \geq p \Rightarrow n \geq p_1 \Rightarrow |u_{2n} - l| = |u_m - l| < \varepsilon$

- $m = 2n+1$

$m \geq p \Rightarrow n \geq p_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - l| = |u_m - l| < \varepsilon$

Dans le cas où l est infini, la démonstration se fait de façon analogue

Exercice

Etudier la convergence des suites suivantes :

a) $u_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ b) $v_n = \dfrac{\cos(n\pi) + (-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ c) $w_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Solution

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{2n} = 1 \\ u_{2n+1} = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1 \end{cases}$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} \Rightarrow$ La suite (u_n) n'admet pas de limite donc elle est divergente

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\frac{\cos(n\pi)+(-1)^n}{n}=\frac{2.(-1)^n}{n}$ Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases} v_{2n}=\frac{1}{n} \\ v_{2n+1}=-\frac{2}{2n+1}\end{cases}$ et $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n}=0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1}=0\end{cases}$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1}=0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

c) • $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)=\frac{1}{2n+1}\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n+1}=0$

• $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_{2n}=\frac{1}{2n}\cos\left(\frac{2n\pi}{2}\right)=\frac{1}{2n}\cos(n\pi)=\frac{(-1)^n}{2n}$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $x_n=w_{2n}$ alors on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases} x_{2n}=\frac{1}{4n} \\ x_{2n+1}=-\frac{1}{4n+2}\end{cases}$ et $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n}=0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1}=0\end{cases}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n}=0$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n+1}=0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$

4) Opérations sur les limites des suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définie sur la même partie I de $\mathbb{N}$

On a les résultats suivants :

$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim(u_n+v_n)$
$l\ (l\in\mathbb{R})$	$l'\ (l'\in\mathbb{R})$	$l+l'$
$l\ (l\in\mathbb{R})$	$+\infty$	$+\infty$
$l\ (l\in\mathbb{R})$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim(u_n.v_n)$
$l\ (l\in\mathbb{R})$	$l'\ (l'\in\mathbb{R})$	$l.l'$
$l\neq 0$	∞	∞ (règle des signes)
∞	∞	∞ (règle des signes)
0	∞	Forme in déterminée

$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
$l\ (l\in\mathbb{R})$	$l'\ (l'\in\mathbb{R}^*)$	$\frac{l}{l'}$
$l\ (l\in\mathbb{R})$	∞	0
∞	$l',(l'\in\mathbb{R}^*)$	∞ (règle des signes)
$l,(l\in\mathbb{R}^*)$	0	∞ (règle des signes)
∞	∞	Forme indéterminée
0	0	Forme indéterminée

Exercice

Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

a) $u_n = \dfrac{n^2-3n+2}{n^2+n+1}$ b) $u_n = \sqrt{4n^2+1}-2n$ c) $u_n = \dfrac{4^n-3^n}{4^n+3^n}$

Solution

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-3n+2}{n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+1}-2n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2\right)} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4^n-3^n}{4^n+3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n} = 1$ car $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

5) Suites bornées et convergence

Théorème

Toute suite convergente est bornée

Démonstration :

Soit (u_n) une suite définie sur I qui converge vers un réel l

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I$ et $n \geq p$, $l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon$

Posons : $M = \sup\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \ldots. u_{p-1}, l+\varepsilon\}$ et $m = \inf\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \ldots. u_{p-1}, l-\varepsilon\}$

Soit $n \in I$, donc : • Si $n \geq p$ alors $m \leq l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon \leq M$

• Si $n_0 \leq n < p$ alors $u_n \in \{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \ldots. u_{p-1}\}$ donc $m \leq u_n \leq M$

D'où pour tout n de I on a : $m \leq u_n \leq M$ donc la suite (u_n) est bornée

Remarque

Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente (Exemple : $u_n = (-1)^n$)

II - LIMITE ET ORDRE

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel l
S'il existe $p \in I$ tel que pour tout entier $n \geq p$, $u_n \geq 0$ (resp $u_n \leq 0$) alors :
$l \geq 0$ (resp $l \leq 0$)

Démonstration

On suppose que $l < 0$ et on pose $\varepsilon = -\dfrac{l}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ donc $\exists\, q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I$, $n \geq q \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

$|u_n - l| < -\dfrac{l}{2} \Leftrightarrow \dfrac{l}{2} < u_n - l < -\dfrac{l}{2} \Rightarrow u_n < \dfrac{l}{2} < 0$ ce qui est impossible si on choisit $n \geq \sup(p,q)$

On appliquant ce résultat à la suite $(-u_n)$, on montre que si $u_n \leq 0$ à partir d'un certain rang alors $l \leq 0$

Remarque

On peut avoir $u_n > 0, \forall n \in I$ et $l = 0$ (Exemple : $u_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$)

Conséquences

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies sur I qui convergent respectivement vers deux réels l et l'
S'il existe $p \in I$ tel que $\forall\ n \geq p$, on a $u_n \leq v_n$ alors $l \leq l'$
Comme on peut avoir $l = l'$ même si $\forall\ n \geq p$, $u_n < v_n$
(Exemple : $u_n = \frac{1}{n+2}$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$)
- Soit (u_n) une suite réelle définie sur I qui converge vers un réel l et a et b deux réels tel que $a < b$
S'il existe $p \in I$ tel que $\forall n \geq p$, $a \leq u_n \leq b$ alors $a \leq l \leq b$
Comme on peut avoir $l = a$ ou $l = b$ même si $\forall\ n \geq p$, $a < u_n < b$

Théorème (théorème des gendarmes)

Soient $(u_n), (v_n)$ et w_n trois suites réelles définies sur I et l un réel

Si on a : $\begin{cases} \text{Il existe } p \in \mathbb{N} \text{ telque } \forall\ n \in I \text{ et } n \geq p,\ u_n \leq w_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$

Démonstration

Pour tout $n \in I$, on pose $x_n = w_n - u_n$ et $y_n = v_n - u_n$

On a $\forall n \in I$ et $n \geq p$, $x_n \leq y_n$

Soit $\varepsilon > 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = l - l = 0 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I, n \geq q \Rightarrow |y_n| < \varepsilon$

Donc pour $n \in I, n \geq \sup(p,q)$ on a : $0 \leq x_n \leq y_n < \varepsilon$

Soit $\alpha = \sup(p,q)$

On a alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I, n \geq \alpha \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

Et puisque $w_n = x_n + u_n, \forall n \in I$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n + u_n) = l$

Conséquence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies sur I

Si on a : $\begin{cases} \text{Il existe } p \in \mathbb{N} \text{ telque } \forall\ n \in I \text{ et } n \geq p,\ |u_n| \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exemple

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\sin n}{n}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice

1) Etudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n - \cos n}{3n + (-1)^n}$

2) Montrer que la suite réelle (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k}$ converge vers 1

Solution

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \le -\cos n \le 1 \Rightarrow n - 1 \le n - \cos n \le n + 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \le (-1)^n \le 1 \Rightarrow 3n - 1 \le 3n + (-1)^n \le 3n + 1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{3n+1} \le \dfrac{1}{3n + (-1)^n} \le \dfrac{1}{3n-1}$

Ainsi on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} 0 \le n - 1 \le n - \cos n \le n + 1 \\ 0 < \dfrac{1}{3n+1} \le \dfrac{1}{3n + (-1)^n} \le \dfrac{1}{3n-1} \end{cases}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n-1}{3n+1} \le \dfrac{n - \cos n}{3n + (-1)^n} \le \dfrac{n+1}{3n-1}$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n-1}{3n+1} \le u_n \le \dfrac{n+1}{3n-1}$

En plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n-1}{3n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{3n-1} = \dfrac{1}{3}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1;2;..n\}$. On a : $1 \le k \le n \Rightarrow n^2 + 1 \le n^2 + k \le n^2 + n$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+k} \le \dfrac{1}{n^2+1} \Rightarrow \dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{n}{n^2+k} \le \dfrac{n}{n^2+1}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k} \le \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+1} \Rightarrow \dfrac{n^2}{n^2+n} \le S_n \le \dfrac{n^2}{n^2+1}$

Et puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies sur I

- S'il existe $q \in \mathbb{N}$ telque $\forall\, n \in I$ et $n \ge q$, $u_n \le v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- S'il existe $q \in \mathbb{N}$ telque $\forall\, n \in I$ et $n \ge q$, $u_n \le v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

- Soit $A > 0$, montrons qu'il existe un entier naturel m tel que $\forall\, n \in I$, $n \ge m \Rightarrow u_n > A$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow$ il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in I, n \ge p \Rightarrow u_n > A$

Posons $m = \sup(p,q)$ et soit $n \in I$. $n \ge m \Rightarrow v_n \ge u_n \ge A$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

- Pour $n \ge q$ on a : $-v_n \le -u_n$ en plus $\lim\limits_{n \to -\infty} (-v_n) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exercice

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

2) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}) = +\infty$

Solution

1) On a : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n+1>n \Leftrightarrow \sqrt{n+1}>\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

2) On a $\forall k\in\{1,2,\dots n\}, \sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$ Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

Ou encore $(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\dots\dots(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Ce qui donne après simplification $\sqrt{n+1}-1<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

D'où $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)>2\sqrt{n+1}-2$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}2\sqrt{n+1}-2=+\infty$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)>+\infty$

III- SUITES DU TYPE $v_n=f(u_n)$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert J, l un réel de J et (u_n) une suite à valeurs dans J.
Si (u_n) converge vers l et f est continue en l alors la suite $f(u_n)$ converge vers $f(l)$

Démonstration :

Soit $\varepsilon>0$ .Montrons qu'il existe $p\in\mathbb{N}$, tel que $\forall n\in I, n\geq p \Rightarrow |f(u_n)-f(l)|<\varepsilon$

f est continue en l $\Rightarrow$ il existe un réel $\alpha>0$ tel que $\forall x\in J, |x-l|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(l)|<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$, donc il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\in I\ ,n\geq p\ \Rightarrow |u_n-l|<\alpha$

Donc pour $n\in I$ et $n\geq p$ on a $u_n\in J$ et $|u_n-l|<\alpha$ et par suite $|f(u_n)-f(l)|<\varepsilon$

Corollaire

Si (u_n) est une suite à valeurs dans un intervalle J et vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction continue sur J
Si la suite (u_n) converge vers un réel l de J, alors l est une solution de l'équation $l=f(l)$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=0\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0

2) En déduire la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

Solution

1) On a $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$ alors f est continue en 0

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et f est continue en 0 alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = f(0) = \frac{1}{2}$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert J, sauf peut être en un réel l de J et (u_n) une suite à valeurs dans $J \setminus \{l\}$

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{x\to l} f(x) = L$ où $L \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ .Montrons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in I, n \geq p \Rightarrow |f(u_n) - L| < \varepsilon$

On a $\lim_{x\to l} f(x) = L$ donc il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in J, 0 < |x - l| < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. (*)

$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \alpha$

Alors pour $n \geq p$ on a $|u_n - l| < \alpha$ et par hypothèse $u_n \in J \setminus \{l\}$

Ce qui permet d'écrire $0 < |u_n - l| < \alpha$ pour $n \geq p$

Et d'après (*), on obtient $|f(u_n) - L| < \varepsilon$.

En conclusion $\forall \varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in I, n \geq p \Rightarrow |f(u_n) - L| < \varepsilon$ D'où $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$

Remarque

Le théorème précédent reste valable si l ou L est infinie

Conséquence

Si f est une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(n) = l$

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

IV - CONVERGENCE DES SUITES MONOTONES

Théorème (admis)

- Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors elle converge vers un réel l vérifiant $u_n \leq l$ à partir d'un certain rang
- Si (u_n) est une suite décroissante et minorée alors elle converge vers un réel l vérifiant $u_n \geq l$ à partir d'un certain rang

Exercice

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante .En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Solution

1) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, 1\le u_n\le 2$

Pour $n=0$, $u_0=1\Rightarrow 1\le u_0\le 2$

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $1\le u_n\le 2$ et montrons que $1\le u_{n+1}\le 2$

On a : $2\le 1+u_n\le 3\Rightarrow 1\le\sqrt{2}\le\sqrt{1+u_n}\le\sqrt{3}\le 2\Rightarrow 1\le u_{n+1}\le 2$

<u>Conclusion</u> : $\forall n\in\mathbb{N}, 1\le u_n\le 2$

2) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\le u_{n+1}$

Pour $n=0$, $u_0=1$ et $u_1=\sqrt{2}$ donc $u_0\le u_1$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $u_n\le u_{n+1}$ et montrons que $u_{n+1}\le u_{n+2}$

On a : $\Rightarrow u_n\le u_{n+1}\Rightarrow 1+u_n\le 1+u_{n+1}\Rightarrow\sqrt{1+u_n}\le\sqrt{1+u_{n+1}}\Rightarrow u_{n+1}\le u_{n+2}$

<u>Conclusion</u> : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\le u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante

Ainsi (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente vers un réel l

$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n) \text{ où } f: x\mapsto\sqrt{1+x} \\ u_n \text{ converge vers } l \text{ de } [1;2] \\ f \text{ continue sur } [-1;+\infty[\text{ en particulier sur } [1;2] \text{ donc } f \text{ continue en } l \end{cases}$$

Par suite l vérifie l'équation $l=f(l)$

Alors $\begin{cases} l=f(l) \\ l\in[1;2]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1+l}=l \\ l\in[1;2]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} l^2-l-1=0 \\ l\in[1;2]\end{cases}\Leftrightarrow l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Théorème

- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Démonstration

- Soit $A>0$ et (u_n) une suite définie sur I, croissante et non majorée

(u_n) est non majorée $\Rightarrow\exists\, p\in\mathbb{N}$ tel que $u_p>A$

Et comme la suite (u_n) est croissante alors $\forall n\in I, n\ge p\Rightarrow u_n\ge u_p>A$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

- Soit $B<0$ et (v_n) une suite définie sur I, décroissante et non minorée

(v_n) est non minorée $\Rightarrow\exists\, q\in\mathbb{N}$ tel que $v_q<B$ et comme la suite (v_n) est décroissante alors :

$\forall n\in I, n\ge q\Rightarrow v_n\le v_q<B$ Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$

V - SUITES ADJACENTES

Définition

On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies sur I, sont adjacentes si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- Pour tout entier $n\in I$, $u_n\le v_n$
- (u_n) est croissante et (v_n) et décroissante
- $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$

Théorème

Si deux suites réelles sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite

Démonstration

(u_n) est croissante donc $u_{n_0} \le u_n$ et $u_n \le v_n$ pour tout $n \ge n_0$ $(n \in I)$

Donc $\forall n \in I, u_{n_0} \le v_n \Rightarrow (v_n)$ est minorée

Ainsi (v_n) est décroissante et minorée alors elle converge

(v_n) est décroissante donc $v_n \le v_{n_0}$ et $u_n \le v_n$ pour tout $n \ge n_0$ $(n \in I)$

Donc $\forall n \in I, u_n \le v_{n_0} \Rightarrow (u_n)$ est majorée

Ainsi (u_n) est croissante et majorée alors elle converge

En plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice

Soient les suites (u_n) et (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \;,\; v_0 = 8 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \le \dfrac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \le 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

e) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α

3) Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = u_n v_n$

a) Montrer que la suite (w_n) est constante

b) En déduire la valeur de α