DÉRIVABILITÉ

I - RAPPELS

1) Dérivabilité en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de centre x_0
On dit que f est dérivable au point x_0 s'il existe un nombre réel l tel que :
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$
Le réel l, lorsqu'il existe, est appelée le nombre dérivé de f en x_0, il est noté $f'(x_0)$

Remarque

Le nombre $f'(x_0)$ peut être, également, obtenu en calculant $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Interprétation graphique et approximation affine

• Si une fonction f est dérivable en x_0 alors la courbe représentative de f admet au point $M(x_0,f(x_0))$ une tangente Δ de coefficient directeur $f'(x_0)$
Une équation de Δ est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f(x_0)\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ

• Au voisinage du point $M(x_0,f(x_0))$, la courbe et la tangente son presque confondues .Donc sur un petit voisinage de x_0 on peut assimiler la branche de la courbe à un segment de la tangente. Et de cette façon on peut obtenir une approximation de $f(x)$ si x est proche de x_0 en remplaçant $f(x)$ par $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
On dit alors que $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ est l'approximation affine locale de $f(x)$

Exemple

La fonction $g:x\mapsto\sqrt{x+1}$ est dérivable en 0 et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

Donc pour x proche de 0, $\sqrt{x+1}\simeq f'(0)(x-0)+f(0)$ ou encore $\sqrt{1+x}\simeq\dfrac{x}{2}+1$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$ et soit ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) Déterminer le nombre dérivé de f en chacun des réels 0 et 1
2) Préciser les tangentes à ζ aux points d'abscisses 0 et 1
3) Donner une approximation affine de chacun des réels $(1{,}0002)^3$ et $(2{,}0001)^3$

Solution

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+6x+3$ donc $f'(0)=3$ et $f'(1)=12$
2) Soient Δ et Δ' les tangentes à ζ aux points d'abscisses 0 et 1 respectivement
$\Delta: y=3x+1$, $\Delta': y=12x-4$
3) $(1{,}0002)^3=(1+0{,}0002)^3=f(0.0002)\simeq 3\times 0.0002+1=1{,}0006$
$(2{,}0001)^3=(1+1{,}0001)^3=f(1.0001)\simeq 12\times 1.0001-4=8.0012$

Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - h, x_0]$ $(h > 0)$ .On dit que f est dérivable à gauche en x_0 s'il existe un nombre réel l tel que $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$
Ce réel l, lorsqu'il existe, est appelée le nombre dérivé à gauche de f au point x_0, il est noté $f_g'(x_0)$

Si une fonction f est dérivable à gauche en x_0 alors la courbe représentative de f admet à gauche au point $M(x_0, f(x_0))$ une demi tangente de coefficient directeur $f_g'(x_0)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0; x_0 + h[$ $(h > 0)$ .On dit que f est dérivable à droite en x_0 s'il existe un nombre réel l tel que $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$
Ce réel l, lorsqu'il existe, est appelée le nombre dérivé à droite de f au point x_0, il est noté $f_d'(x_0)$

Si une fonction f est dérivable à droite en x_0 alors la courbe représentative de f admet à droite au point $M(x_0, f(x_0))$ une demi tangente de coefficient directeur $f_d'(x_0)$

Conséquence

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I
La f est dérivable en x_0 si, et seulement si f est dérivable à droite en x_0 et dérivable à gauche en x_0 et $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)|x-2| & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1
   b) Montrer que f est dérivable en 2
3) On note ζ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les tangente aux points d'abscisses 0 et 2 et les demi tangentes au point d'abscisse 1

Solution

1) La fonction $x \mapsto \frac{x}{x-2}$ est continue sur $]-\infty; 1]$ $\Rightarrow$ f est continue sur $]-\infty; 1]$
(Restriction d'une fonction rationnelle)
La fonction $x \mapsto (x-2)|x-2|$ est continue sur $]1; +\infty[$ $\Rightarrow$ f est continue sur $]1; +\infty[$
(Produit de deux fonctions continues)
En plus $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x-2)|x-2| = \lim\limits_{x \to 1^+} -(x-2)^2 = -1 = f(1)$
Alors f est continue à droite en 1
Par suite f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty; 1]$ et $]1; +\infty[$ et a droite en 1
Alors f est continue sur $\mathbb{R}$

2) a) • $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\dfrac{x}{x-2}+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2}{x-2}=-2$ alors f est dérivable à gauche en 1 et $f_g^{'}(1)=-2$

• $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-2)|x-2|+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-(x-2)^2+1}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(3-x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$

Alors f est dérivable à droite en 1 et $f_d^{'}(1)=2$

Et puisque $f_g^{'}(1)\neq f_d^{'}(1)$ alors f n'est pas dérivable en 1

b) • $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}|x-2|=0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(2)=0$

3) ζ admet au point d'abscisse 2 une tangente d'équation $y=f(2)=0$, une tangente au point d'abscisse 1 d'équation $y=f'(0)x+f(0)=-\dfrac{1}{2}x$ et deux demi tangentes d'équations $y=f_g^{'}(1)(x-1)+f(1)=-2x+1$ et $y=f_d^{'}(1)(x-1)+f(1)=2x-3$ au point d'abscisse 1

2) Dérivabilité sur un intervalle

Définition

- Une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout réel de I
- Une fonction f est dérivable sur un intervalle $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$ et si elle est dérivable à droite en a et à gauche en b
- Une fonction f est dérivable sur un intervalle $[a,b[$ si elle est dérivable sur $]a,b[$ et si elle est dérivable à droite en a
- Une fonction est dérivable sur un intervalle $]a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$ et si elle est dérivable à gauche en b

L'application qui tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et est notée f'

3) Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	Intervalle	$f'(x)$
x^n, $(n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n}$, $(n\in\mathbb{N}^*)$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$
$\tan(ax+b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition	$a(1+\tan^2(ax+b))$

4) Opérations sur les fonctions dérivées

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f+g$	I	$f'+g'$
$\alpha f\ (\alpha\in\mathbb{R})$	I	$\alpha f'$
$f\times g$	I	$f'\times g+f\times g'$
$\dfrac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x\in I\,;f(x)\neq 0\}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	Tout intervalle inclus dans $\{x\in I\,;g(x)\neq 0\}$	$\dfrac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$
$f^n\ (n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$	I	$nf'.f^{n-1}$
$\dfrac{1}{f^n}\ (n\in\mathbb{N}^*)$	Tout intervalle inclus dans $\{x\in I\,;f(x)\neq 0\}$	$-nf'f^{-n-1}$

II - DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- La dérivée f' de f est appelée la dérivée première de f
- Si la fonction f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée f'' ou $f^{(2)}$
- Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}\,(n\geq 2)$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée nième de f et est notée $f^{(n)}$

  La dérivée nième de f est aussi appelée dérivée d'ordre n de f

Exercice

Soit la fonction $f:x\mapsto\cos x$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

Solution

f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

Pour $n=1$, $f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ Supposons que, $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ et montrons que $f^{(n+1)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{(n+1)\pi}{2}\right)$

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'(x)=-\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

<u>Conclusion</u> : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

III - DÉRIVÉE DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel x_0 et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(x_0)$

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$g\circ f(x_0)=f'(x_0).g'(f(x_0))$

Démonstration

Considérons la fonction φ définie par $\varphi(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} \text{ si } y\neq f(x_0)\\ g'(f(x_0)) \text{ si } y=f(x_0)\end{cases}$

La fonction g est dérivable en $f(x_0)$ alors

$\lim\limits_{y\to f(x_0)}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to f(x_0)}\dfrac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}=g'(f(x_0))=\varphi(f(x_0))\Rightarrow\varphi$ est continue en $f(x_0)$

La fonction f est continue en x_0 alors $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(f(x))=g'(f(x_0))$

De plus pour $x\neq x_0$ on peut écrire :

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\begin{cases}\varphi(f(x)).\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ si } f(x)\neq f(x_0)\\ 0 \text{ si } f(x)=f(x_0)\end{cases}$$

f est dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ donc

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\varphi(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f(x_0).g'(f(x_0))$$

Conséquence

> Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J tel que $f(I)\subset J$ alors $g\circ f$ est dérivable sur I et on a : $\forall x\in I,(g\circ f)'(x)=f'(x).g'(f(x))$

Application (dérivée de $\sqrt{f}$)

Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I

Si on pose $g(x)=\sqrt{x}$ alors $\sqrt{f}=g\circ f$

$\begin{cases}f \text{ est dérivable sur I}\\ g \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[\\ f(I)\subset]0,+\infty[\text{ car f est strictement positive sur I}\end{cases}$

Alors la fonction $\sqrt{f}=g\circ f$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x\in I,\left(\sqrt{f}\right)'(x)=\left(g\circ f\right)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))=f'(x)\times\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Retenons

> Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $\forall x\in I,\left(\sqrt{f}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Exemple

Soit $f:x\mapsto\sqrt{x^2-5x+6}$

La fonction $u:x\mapsto x^2-5x+6$ et dérivable est strictement positive sur chacun des intervalles $]-\infty,2[$ et $]3,+\infty[$ alors $f=\sqrt{u}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,2[$ et $]3,+\infty[$ et $\forall x\in]-\infty,2[\cup]3,+\infty[\ ,f'(x)=\dfrac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

IV - THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Théorème de Rolle

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$ alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $f'(c)=0$

Démonstration

- Si f est constante sur $[a,b]$ alors $f'x)=0$ pour tout $x\in\,]a,b[$
- Supposons que f est non constante sur $[a,b]$

f est continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b])$ est un intervalle fermé borné $[m,M]$ et par suite il existe α et β de $[a,b]$ tels que $f(\alpha)=m$ et $f(\beta)=M$

L'un au moins des réels α et β appartient à $]a,b[$ car f n'est pas constante sur $[a,b]$

Supposons que $\alpha\in\,]a,b[$

$\forall x\in\,]a,\alpha[\,,\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\dfrac{f(x)-m}{x-\alpha}\leq 0\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)\leq 0$

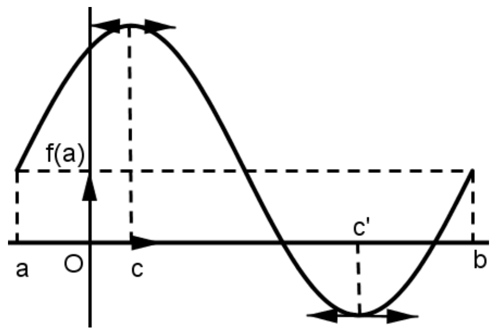
$\forall x\in\,]\alpha,b[\,,\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\dfrac{f(x)-m}{x-\alpha}\geq 0\Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)\geq 0$

Ce qui donne $f'(\alpha)=0$

Même raisonnement si on suppose que $\beta\in\,]a,b[$

Interprétation graphique

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $f(a)=f(b)$.
Alors sa courbe représentative, dans un repère cartésien admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses



Exemple

La fonction $f:\ x\mapsto x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x+2$ est continue sur $[-1;1]$ dérivable sur $]-1;1[$ et $f(1)=f(-1)=14$ alors la courbe de f admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses

Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un réel $c\in\,]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Démonstration

Posons $g(x)=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$ pour tout $x\in[a,b]$

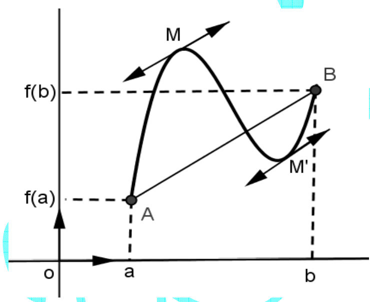
La fonction g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $g(a)=g(b)=f(a)$

D'après le théorème de Rolle il existe $c\in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$

Alors $g'(c)=0\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interprétation graphique

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$
Alors sa courbe représentative, dans repère cartésien, admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB) où $A(a;f(a))$ et $B(b,f(b))$



V- INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS

Théorème

Soit f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que :

$m\leq f'(x)\leq M$ pour tout $x\in]a;b[$ Alors $m\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M$

Démonstration

La fonction f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors d'après le théorème des accroissements finis il existe au moins un réel c de $]a,b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

L'hypothèse : $m\leq f'(x)\leq M$ pour tout $x\in]a;b[$ permet de conclure que $m\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M$

Corollaire

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I On suppose qu'il existe un réel strictement positif k tel que pour tout $x\in I$, $|f'(x)|\leq k$
Alors pour tous réels a et b de I, $|f(b)-f(a)|\leq k|b-a|$

Démonstration

L'hypothèse $|f'(x)|\leq k$, pour tout $x\in I$ équivaut à : $-k\leq f'(x)\leq k$, $x\in I$

Supposons que $a<b$

Comme f est dérivable sur I, elle est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis $-k\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq k$

Ce qui est équivaut à $|f(b)-f(a)|\leq k|b-a|$

Cette dernière inégalité reste encore vraie dans les cas $a>b$ et $a=b$

Exercice

1) Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan x$

a) Montrer que $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right], 1\le f'(x)\le 2$

b) En déduire que $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right], x\le \tan x\le 2x$

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a : $|\sin x|\le x$

Solution

1) a) f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right], f'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

Et puis que $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ \frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos x\le 1$ alors $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ \frac{1}{2}\le\cos^2 x\le 1$

Donc $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ 1\le\frac{1}{\cos^2 x}\le 2\Rightarrow\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ 1\le f'(x)\le 2$

b) Soit x un réel de $\left]0;\frac{\pi}{4}\right]$ alors $[0;x]\subset\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

f est continue et dérivable sur $[0;x]$ et $\forall t\in[0;x],\ 1\le f'(t)\le 2$ alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis $1\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le 2\Rightarrow x\le\tan x\le 2x$

En plus $\tan 0=0$ et l'inégalité est vérifiée donc $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right], x\le\tan x\le 2x$

2) La fonction $g:t\mapsto\sin t$ est continue est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ g'(t)=\cos t$

En plus $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $|g'(t)|\le 1$ alors d'après le corollaire de l'inégalité des accroissements finis on a : $\forall x\in\mathbb{R}_+ ,|g(x)-g(0)|\le|x-0|\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}_+ ,|\sin x|\le x$

VI - SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

Théorème

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I
Si f' est strictement positive sur I alors f est strictement croissante sur I
Si f' est strictement négative sur I alors f est strictement décroissante sur I

Démonstration

Supposons que $\forall x\in I$, $f'(x)>0$ et considérons deux réels a et b de I tels que $a<b$

La fonction f est dérivable sur I alors elle est dérivable sur $[a,b]$

D'après le théorème des accroissements finis il existe un réel c de $]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ et comme $f'(c)$ et $b-a$ sont strictement positifs alors $f(b)-f(a)>0$

Ce qui prouve que f est strictement croissante sur I

La deuxième propriété découle de la première en considérant la fonction $-f$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I
Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I alors f est strictement croissante sur I
Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I alors f est strictement décroissante sur I

Démonstration

De l'hypothèse $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de I, il résulte que la fonction f est croissante sur I
Supposons qu'il existe deux réels a et b de I tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$ alors
$\forall x \in]a;b[, f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow f$ est constante sur $[a;b]$ $\Rightarrow \forall x \in]a,b[, f'(x) = 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse « f ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I »
La deuxième propriété découle de la première en considérant la fonction $-f$

Exemple

Considérons la fonction f définie sur $[0;\pi]$ par $f(x) = \cos x$
f est dérivable sur $[0;\pi]$ et $f'(x) = -\sin x \leq 0$ donc f est décroissante sur $[0;\pi]$
et puisque f' s'annule seulement en 0 et π (en un nombre fini de points) on peut dire que f est strictement croissante sur $[0;\pi]$

Théorème

Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$
Si f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $]a,b[$ alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $[a,b]$
Si f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $]a,b[$ alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a,b]$

Démonstration

Soient c et d deux réels de $[a,b]$ tels que $c < d$
La fonction f est continue sur $[c,d]$ et dérivable sur $]c,d[$ alors il existe un réel x_0 de $]c,d[$ tel que $f(d) - f(c) = f'(x_0)(d - c)$ Le théorème en découle

VII- EXTREMA

Définition (Rappel)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I
On dit que f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que $\forall x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$
On dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 et inclus dans I tel que $\forall x \in J$, $f(x) \geq f(x_0)$
Lorsque f admet un minimum local ou un maximum local en x_0 on dit que f admet un extremum local

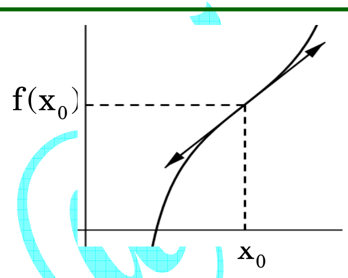
Théorème (Rappel)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I
Si f admet un extrémum local en x_0 alors $f'(x_0)=0$
Si $f'(x)$ s'annule en x_0 en changent de signe alors f admet un extrémum local en x_0

IIX - POINT D'INFLEXION

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I
et dérivable en un réel x_0 de I et ζ_f sa courbe représentative
dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$
On dit que le point $A(x_0,f(x_0))$ est un point d'inflexion
de ζ_f si ζ_f traverse sa tangente en ce point



Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $]x_0-h,x_0+h[$ $(h>0)$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
Si f'' s'annule en x_0 en changent de signe alors le point $I(x_0,f(x_0))$ est un point d'inflexion de ζ_f

Démonstration :
La tangente T à ζ_f au point $I(x_0,f(x_0))$ a pour équation $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
La fonction $\phi : x\mapsto f(x)-f'(x_0)(x_0-x)-f(x_0)$ est deux fois dérivable sur $]x_0-h,x_0+h[$
Et $\forall x\in\,]x_0-h,x_0+h[\,,\phi''=f''(x)$ et alors deux cas peuvent se présenter :

1er cas :

x	x_0-h	x_0	x_0+h
Φ''(x)	-	0	+
Φ'	↘	0	↗

Alors on :

x	x_0-h	x_0	x_0+h
Φ'(x)	+	0	+
Φ	↗	0	↗
Φ(x)	-	0	+
Position de ζ % T	ζ au dessous de T	$\zeta\cap T=I$	ζ au desuus de T

2ème cas :

x	x_0-h	x_0	x_0+h
Φ''(x)	+	0	-
Φ'	↗	0	↘

Alors on a

x	x_0-h	x_0	x_0+h
Φ'(x)	-	0	-
Φ	↘	0	↘
Φ(x)	+	0	-
Position de ζ % T	ζ au dessus de T	$\zeta\cap T=I$	ζ au dessous de T

Ce qui prouve que I est un point d'inflexion de ζ