CONTINUITÉ ET LIMITES

I - RAPPELS

1) Continuité

Définitions (Rappels)

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$
  f est continue en x_0, si et seulement si, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0,a[$ (avec $x_0 < a$)
  f est continue à droite en x_0, si et seulement si, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a,x_0]$ (avec $a < x_0$)
  f est continue à gauche en x_0, si et seulement si, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Théorème

Soit f une fonction définie un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$
f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrons que f est continue en 0

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$ Alors f est continue en 0

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5x-6}{|x-1|} & \text{si } x \neq 1 \\ 7 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Etudions la continuité de g en 1

- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+5x-6}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+6)}{\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 1^+} x+6 = 7 = g(1)$

Alors g est continue à droite en 1

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+5x-6}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+6)}{-\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 1^-} -x-6 = -7 \neq g(1)$

Alors g n'est pas continue à gauche en 1. Par suite g n'est pas continue en 1

Exercice

Soit h la fonction définie par $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \in [0;2[\\ \sqrt{x+7} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Etudier la continuité de h en 0 et en 2

Solution

• Etude de la continuité de h en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 1 = -1 = h(0)$ Alors h est continue à droite en 0

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \neq h(0)$ Alors h n'est pas continue à gauche en 0

Par suite h n'est pas continue en 0

• Etude de la continuité de h en 2 :

$\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x+7} = 3 = h(2)$ Alors h est continue à droite en 2

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 - 1 = 3 = h(2)$ Alors h est continue à gauche en 2

Par suite h est continue à droite et à gauche en 2 donc h est continue en 2

Opérations sur les fonctions continues

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I

- Si f est continue en x_0 alors les fonctions αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), $|f|$ et f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en x_0
- Si f est continues en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en x_0
- Si f et g sont continues en x_0 alors les fonctions $f+g$ et $f \times g$ sont continues en x_0
- Si f et g sont continues en x_0 et $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continues en x_0
- Si f est positive sur I et f est continue en x_0 alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0

Conséquences

- Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son domaine de définition
- Chacune des fonctions sinus et cosinus est continue en tout point de $\mathbb{R}$
- La fonction tangente est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Prolongement par continuité

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel x_0 de I

Si f admet une limite finie l au point x_0 alors la fonction g définie sur I par

$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ l \text{ si } x = x_0 \end{cases}$ est continue en x_0.

On l'appelle prolongement par continuité de f au point x_0

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x}$

Montrons que f est prolongeable par continuité en 0

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 + \sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x + \frac{\sin x}{x} = 1$ Donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x}$, si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x)=\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

Montrons que h est prolongeable par continuité en 0

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0} 4\left(\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}\right)=4\times\frac{1}{2}=2$$

Donc h est prolongeable par continuité en0 et son prolongement est la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos(2x)}{x^2} \text{ si } x\neq 0\\ 2 \quad \text{si } x=0\end{cases}$

Continuité sur un intervalle

Définition

- Une fonction est continue sur un intervalle ouvert si elle est continue en tout point de cet intervalle
- Une fonction est continue sur un intervalle $[a;b]$ si elle est continue sur $]a;b[$, à droite en a et à gauche en b
- De façon analogue on définit la continuité d'une fonction sur les intervalles $[a;b[$; $]a;b]$ $[a;+\infty[$ et $]-\infty;a]$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi[$ par $\begin{cases} f(x)=\frac{x}{\sin x} \text{ si } x\in]0;\pi[\\ f(0)=1\end{cases}$

Montrons que f est continue sur $[0;\pi[$

- Sur $]0,\pi[$ f est le rapport de deux fonctions continues sur $]0,\pi[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle donc f est continue sur $]0,\pi[$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1=f(0)$ donc f est continue à droite en 0

Conclusion : f est continue sur $]0,\pi[$ et continue à droite en 0 alors f est continue sur $[0;\pi[$

2) Limites

Opérations sur les limites :

Soient f et g deux fonctions. Quand le réel x tend vers un réel x_0, ou vers x_0^+, ou vers x_0^-, ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on a : Les résultats suivants :

Limite d'une somme

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $f+g$ a pour limite
$l(l\in\mathbb{R})$	$l'(l'\in\mathbb{R})$	$l+l'$
$l(l\in\mathbb{R})$	$+\infty$	$+\infty$
$l(l\in\mathbb{R})$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	(Forme indéterminée)

Limite d'un produit

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $f\times g$ a pour limite
$l(l\in\mathbb{R})$	$l'(l'\in\mathbb{R})$	$l\times l'$
$l(l\neq 0)$	∞	∞ (règle de signe)
∞	∞	∞ (règle de signe)
0	∞	(Forme indéterminée)

Limite d'un quotient

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $\frac{f}{g}$ a pour limite
$l(l\in\mathbb{R})$	$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	∞	0
∞	$l'\neq 0$	∞ (règle de signe)
$l\neq 0$	0	∞ (règle de signe)
0	0	(Forme indéterminée)
∞	∞	(Forme indéterminée)

Résultats pratique

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite de son monôme de plus haut degré
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur et du monôme de plus haut degré du dénominateur

Limites de fonctions trigonométriques

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$,$(a\in\mathbb{R}^*)$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$; • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$; • $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

Exercice

Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

Solution

Soit $t=x-\frac{\pi}{4}$ alors $x=t+\frac{\pi}{4}$ donc :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{2}(\cos t.\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin t.\frac{\sqrt{2}}{2})}{1-\sqrt{2}(\sin t.\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos t.\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t+\sin t}{1-\sin t-\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t}+\frac{\sin t}{t}}{\frac{1-\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{-1}=-1$$

II - BRANCHES INFINIES

Définition

Soit f une fonction et soit ζ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$.Soit $M(x;y)$ un point de ζ
On dit que la courbe ζ admet une branche infinie si x ou y tend vers l'infini

1) Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Soit f une fonction et soit ζ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère. Cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$. La droite Δ d'équation $x=a$ $(a\in\mathbb{R})$ est une asymptote à la courbe ζ si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

2) Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

Soit f une fonction et soit ζ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$. La droite Δ d'équation $y=b$ $(b\in\mathbb{R})$ est une asymptote à la courbe ζ si et seulement si : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

Remarque

Le signe de $f(x)-b$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et soit (ζ) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On a : • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$

Alors la droite d'équation $y=1$ est une asymptote à (ζ) au voisinage de $+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$

Alors la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote à (ζ) au voisinage de $-\infty$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ par $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ et soit (ζ') sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

On a : • $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2}{x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2}{x^2-1}=-\infty$

Alors les droites d'équations $x=1$ et $x=-1$ sont des asymptotes à (ζ')

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

Alors la droite d'équation $y=1$ est une asymptote à (ζ') au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

3) Asymptote oblique

Définition

Soit f une fonction et soit ζ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$. La droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe ζ si et seulement si : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$

Remarque

Le signe de $f(x)-(ax+b)$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-1}{2x}$

1) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x+1-\dfrac{1}{2x}$

2) En déduire que la droite $\Delta : y = x+1$ est une asymptote à la courbe représentative de f

Solution

1) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{2x^2+2x-1}{2x} = \dfrac{2x(x+1)-1}{2x} = x+1-\dfrac{1}{2x}$

2) On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+1) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{-1}{2x} = 0$ alors la droite $\Delta : y = x+1$ est une asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

Théorème

La droite $\Delta : y = ax+b$ est une asymptote à la courbe ζ d'une fonction f, si et seulement si il existe une fonction g définie sur D_f telle que

$f(x) = ax+b+g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

Démonstration

- Supposons que $\Delta : y = ax+b$ est une asymptote à la courbe ζ d'une fonction f et posons $g(x) = f(x)-ax-b, \forall x \in D_f$. On a alors $f(x) = ax+b+g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$
- Réciproquement : Supposons qu'il existe une fonction g définie sur D_f telle que $\forall x \in D_f$, $f(x) = ax+b+g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. On alors

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b) = 0$

Et par suite la droite $\Delta : y = ax+b$ est une asymptote à la courbe ζ

Théorème (Recherche des asymptotes obliques)

1) La courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, si et seulement si il existe un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = b$ Cette asymptote est $\Delta : y = ax+b$

2) La courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$, si et seulement si il existe un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax) = b$ Cette asymptote est $\Delta : y = ax+b$

Démonstration :

1) Supposons que la courbe ζ de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique $\Delta : y = ax + b, (a \neq 0)$ alors $\forall x \in D_f, f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(ax + b + g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}(ax + b)$

Donc : Si $a > 0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et si $a < 0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

On peut conclure que si $f(x)$ ne tend pas vers une limite infinie quand x tend $+\infty$, alors la courbe ζ n'a pas d'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(a + \frac{b}{x} + \frac{g(x)}{x}) = a \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim\limits_{x\to+\infty}(b + g(x)) = b$

Réciproquement, s'il existe deux réels a et b tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b$

alors on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$. Ce qui prouve que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe ζ de f au voisinage de $+\infty$

2) Même raisonnement

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{|x|^3}{(x-1)^2}$

Déterminer les asymptotes éventuelles de la courbe représentative ζ de f

Solution

• $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ donc la droite $D : x = 1$ est une asymptote à la courbe ζ de f

• Pour $x > 1$, $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $f(x) - x = \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2}$ D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 2$

Donc la droite $\Delta : y = x + 2$ est une asymptote oblique à ζ au voisinage de $+\infty$

• Pour $x < 0$, $f(x) = \frac{-x^3}{(x-1)^2}$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ et $f(x) + x = \frac{-2x^2 + x}{(x-1)^2}$ D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) + x) = -2$

Donc la droite $\Delta : y = -x - 2$ est une asymptote oblique à ζ au voisinage de $-\infty$

Autres cas de branches infinies

Soit f une fonction telle que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

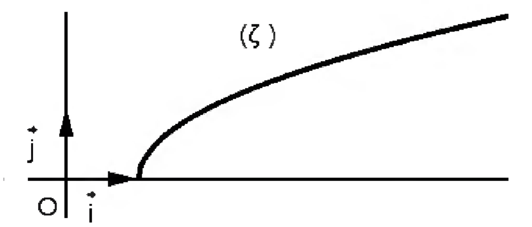
Et soit ζ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors ζ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite $(O; \vec{i})$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors ζ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite $(O; \vec{j})$
- S'il existe un réel $a \neq 0$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = -\infty$,

ou $\lim\limits_{x\to+-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = -\infty$ alors ζ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite dont une équation est $y = ax$

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x-1}$ et soit (ζ) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère Cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$

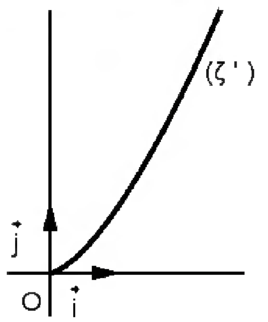


On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=0$

Donc (ζ) admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite $(O;\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$

2) Soit g la fonction définie $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=x\sqrt{x}$ et soit (ζ') sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$

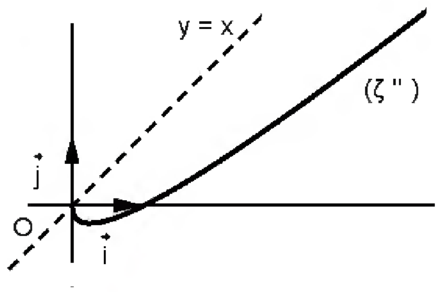


On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Donc (ζ') admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite $(O;\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x)=x-\sqrt{x}$ et soit (ζ'') sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$



On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$

Donc (ζ'') admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

III - CONTINUITÉ ET LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Définition

> Soit f une fonction définie sur un ensemble I et g une fonction définie sur un ensemble J tel que $f(I)\subset J$. La fonction notée $g\circ f$, définie sur I par $g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)$, est appelée fonction composée de f et g

1) Continuité d'une fonction composée

Théorème

> Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel x_0 et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(x_0)$
> Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors la fonction $g\circ f$ est continue en x_0

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$

$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \varepsilon$

g est continue en $f(x_0)$ donc il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $y \in J$

$|y - f(x_0)| < \beta \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (*)

f est continue en x_0 donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$

$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \beta$ (**)

Soit $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \alpha$ alors d'après (**) $|f(x) - f(x_0)| < \beta$

Et d'après (*) $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (en prenant $y = f(x)$) ou encore $|g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \varepsilon$

Conséquence

> Soit f et g deux fonctions
> Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$
> alors $g \circ f$ est continue sur I

Remarque : Si $J = \mathbb{R}$ la condition $f(I) \subset J$ devient inutile

Exercice

1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \cos(x^2 - 3x)$
   Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$

2) Soit F la fonction définie sur $]0;2[$ par $F(x) = \tan\left(\frac{(x-1)}{2}\pi\right)$
   Montrer que F est continue sur $]0;2[$

Solution

1) Posons $f(x) = x^2 - 3x$ .On a $h(x) = \cos(f(x))$ donc $h = \cos \circ f$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)
- La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$

La composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors h est continue sur $\mathbb{R}$

2) Posons $f(x) = \frac{(x-1)}{2}\pi$ et $g(x) = \tan x$

On a pour tout x de $I =]0;2[$, $F(x) = \tan\left(\frac{(x-1)}{2}\pi\right) = \tan(f(x)) = g \circ f(x) \Rightarrow F = g \circ f$

- f est continue sur $]0;2[$ (restriction d'une fonction polynôme)
- g est continue sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- $x \in I \Leftrightarrow 0 < x < 2 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Donc $f(I) \subset J$. Par suite la fonction $F = g \circ f$ est continue sur $]0;2[$

2) Limite de la composée de deux fonctions

Théorème (admis)

> Soit f et g deux fonctions
> Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$ (a, b et c finis ou infinis)

Exemple

Soit $h(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$,$x\neq 0$ calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$:

Pour $x\neq 0$ posons $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{\sin x}{x}$

On a : $\forall x\neq 0$, $h(x)=\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=g\left(\frac{1}{x}\right)=g\left(f(x)\right)=g\circ f(x)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0}g(x)=1\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}g\circ f(x)=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}h(x)=1$$

IV- LIMITE ET ORDRE

Théorème (Rappel)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un réel x_0 de I
Si f admet une limite l ($l\in\mathbb{R}$) en x_0 et si pour tout $x\in I\setminus\{x_0\}$, $f(x)\geq 0$ alors $l\geq 0$

Démonstration

Supposons que $l<0$ et posons $\varepsilon=-\frac{l}{2}$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ implique il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in I\setminus\{x_0\}$

$|x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$ Donc pour tout $x\in\left]x_0-\alpha;x_0+\alpha\right[$ et $x\neq x_0$ on a $|f(x)-l|<\varepsilon$

$|f(x)-l|<\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<f(x)-l<\varepsilon\Leftrightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon\Rightarrow f(x)<\frac{l}{2}<0\Rightarrow f(x)<0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse pour tout $x\in I\setminus\{x_0\}$ $f(x)\geq 0$ d'où $l\geq 0$

Remarque

On peut avoir $l=0$ même si on a $f(x)>0$ pour tout $x\in I\setminus\{x_0\}$

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un réel $x_0\in I$

Si on a : $\begin{cases}\text{pour tout } x\in I\setminus\{x_0\}\,;\, f(x)\leq g(x)\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l\ (l\in\mathbb{R})\ \text{ et } \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l'\ (l'\in\mathbb{R})\end{cases}$ alors $l\leq l'$

Ce résultat reste valable lorsque $x\to x_0^+$ ou $x\to x_0^-$ ou $x\to\infty$

Démonstration

Il suffit de considérer la fonction $h=g-f$ et appliquer le théorème précédent

Conséquence

Soit a, b et l trois réels tel que $a<b$
Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ et pour tout réel $x\in I\setminus\{x_0\}$, $a\leq f(x)\leq b$ alors $a\leq l\leq b$
Comme on peut avoir $l=a$ ou $l=b$ même si $a<f(x)<b$ pour tout réel $x\in I\setminus\{x_0\}$

Théorème (des gendarmes)

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un réel $x_0 \in I$

Si on a : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in I \setminus \{x_0\} ; f(x) \le h(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \quad (l \in \mathbb{R}) \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$

Ce résultat reste valable lorsque $x \to x_0^+$ ou $x \to x_0^-$ ou $x \to \infty$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow$ il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I , 0 < |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Donc pour $x \in I , 0 < |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow l - \varepsilon < f(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \Rightarrow$ il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I , 0 < |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$

Donc pour $x \in I , 0 < |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow g(x) < l + \varepsilon$

Posons $\alpha = \inf(\alpha_1 ; \alpha_2)$ .Alors pour tout $x \in I , 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow l - \varepsilon < f(x)$ et $g(x) < l + \varepsilon$

Or pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $f(x) \le h(x) \le g(x)$ alors pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$ ou encore $x \in I, 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon$

Exercice

1) Soit h la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x - \sin x}{2x + \cos x}$

a) Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$; $\dfrac{x-1}{2x+1} \le h(x) \le \dfrac{x+1}{2x-1}$

b) En déduire la limite de h en $+\infty$

2) Déterminer : $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

Solution

1) a) On a : $\forall x \ge 1, -1 \le \sin x \le 1$ donc $-1 \le -\sin x \le 1$

$-1 \le -\sin x \le 1 \Leftrightarrow x - 1 \le x - \sin x \le x + 1$

De même $\forall x \ge 1, -1 \le \cos x \le 1$

$$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \le 2x + \cos x \le 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2x + \cos x} \le \frac{1}{2x-1}$$

(Car $\forall x \ge 1$; $2x - 1 > 0$)

Pour $x \ge 1$ on a : $\begin{cases} 0 < x - 1 \le x - \sin x \le x + 1 \\ 0 < \dfrac{1}{2x+1} \le \dfrac{1}{2x + \cos x} \le \dfrac{1}{2x-1} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-1}{2x+1} \le h(x) \le \dfrac{x+1}{2x-1}$

On $\begin{cases} \forall x \ge 1 , \dfrac{x-1}{2x+1} \le h(x) \le \dfrac{x+1}{2x-1} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{2x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \dfrac{1}{2}$

2) Pour tout $x \ne 0, -1 \le \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow 1 - x^2 \le 1 + x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \le 1 + x^2$

Donc $\begin{cases} \text{Pour tout } x \neq 0 \quad , 1 - x \leq 1 + x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \leq 1 + x^2 \\ \lim\limits_{x \to 0}(1 - x^2) = \lim\limits_{x \to 0}(1 + x^2) = 1 \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)) = 1$

Conséquence

> Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un réel $x_0 \in I$
>
> Si on a : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in I \setminus \{x_0\} \,;\, |g(x)| \leq f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$
>
> Ce résultat reste valable lorsque $x \to x_0^+$ ou $x \to x_0^-$ ou $x \to \infty$

Exemple

Déterminons $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$

On a : $\forall x \neq 0, \left| x \sin\left(\dfrac{2}{x}\right) \right| \leq |x|$ et $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{2}{x}\right) = 0$

Théorème

> Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un réel $x_0 \in I$. Si on a : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in I \setminus \{x_0\} \,;\, g(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
>
> Ce résultat reste valable lorsque $x \to x_0^+$ ou $x \to x_0^-$ ou $x \to \infty$

Démonstration

Soit un réel $A > 0$.

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow g(x) > A$

Or pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $f(x) \geq g(x)$ alors pour tout $x \in I$, $0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \geq g(x) > A$

Le théorème en découle

Théorème

> Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un réel $x_0 \in I$
>
> Si on a : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in I \setminus \{x_0\} \,;\, f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
>
> Ce résultat reste valable lorsque $x \to x_0^+$ ou $x \to x_0^-$ ou $x \to \infty$

Démonstration

Il suffit de considérer les fonctions $-g$ et $-f$ et appliquer le théorème précédent

Exemple

Déterminons $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

On a : $\forall x \neq 0 \,, \dfrac{1}{x^2} - 1 \leq \dfrac{1}{x^2} + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = +\infty$

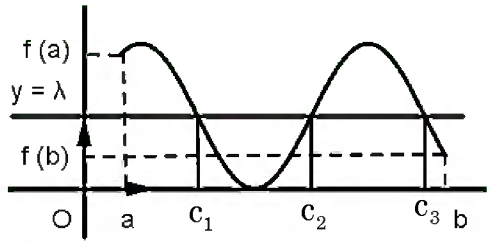
V - IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

Théorème (Rappel)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires (Rappel)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tel que $a<b$
Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe (au moins) un réel c de l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c)=\lambda$ autrement dit l'équation $f(x)=\lambda$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$
En particulier :si $f(a).f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]a;b[$



Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tel que $a<b$. Alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel c de l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c)=\lambda$

Exercice

1) Montrer que l'équation $x^3+x-1=0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$

2) Donner une valeur approché à 10^{-1} près de α

Solution

1) a) Posons $f(x)=x^3+x-1$, f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) en particulier sur $[0;1]$. En plus $f(0).f(1)=(-1)\times 1<0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $]0;1[$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et pour tout réel x, $f'(x)=3x^2+1>0 \Rightarrow$ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc α est l'unique solution réelle de l'équation $f(x)=0$

2) • $\frac{1}{2}$ est le centre de l'intervalle $]0;1[$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}<0$ et on a $f\left(\frac{1}{2}\right).f(1)<0 \Rightarrow \alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

• $\frac{3}{4}$ est le centre de l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right[$ et $f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{3}{4}-1=\frac{11}{64}>0$

Et on a $f\left(\frac{3}{4}\right).f\left(\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow \alpha\in\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$

• $\frac{5}{8}$ est le centre de l'intervalle $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$ et $f\left(\frac{5}{8}\right)=\left(\frac{5}{8}\right)^3+\frac{5}{8}-1=-\frac{67}{512}<0$

Et on a $f\left(\frac{5}{8}\right).f\left(\frac{3}{4}\right)<0 \Rightarrow \alpha\in\left]\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right[$

• $\frac{11}{16}$ est le centre de l'intervalle $\left]\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right[$ et $f\left(\frac{11}{16}\right)=\left(\frac{11}{16}\right)^3+\frac{11}{16}-1=\frac{51}{4096}>0$

Et on a $f\left(\frac{5}{8}\right).f\left(\frac{11}{16}\right) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left]\frac{5}{8};\frac{11}{16}\right[$

Ainsi $\frac{11}{16} - \frac{5}{8} = \frac{1}{16} < 0{,}1$ donc tout réel de l'intervalle $\left]\frac{5}{8};\frac{11}{16}\right[$ est une valeur approché de α à 10^{-1} près .Cette méthode est appelée **Méthode de dichotomie**

Théorème

> Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
> Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I

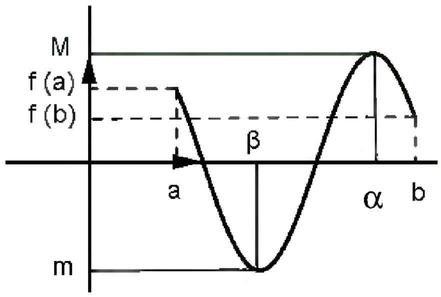
Démonstration

Supposons que f change de signe sur I .Alors il existe deux réels a et b de I tel que $a < b$ et $f(a).f(b) < 0$

Ainsi $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a\,;b] \\ f(a).f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse « f ne s'annule en aucun point de I »

Théorème

> L'image d'un intervalle fermé borné $[a;b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé borné $[m;M]$
> Le réel m est le minimum de f sur $[a;b]$
> Le réel M est le maximum de f sur $[a;b]$



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x$ .Déterminons $f\left(\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]\right)$

f est continue, dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$ et $\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$,$f'(x) = 2\cos x \sin x$

$\underset{x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]}{\text{Max}}\ f(x) = \frac{1}{4}$ et $\underset{x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]}{\text{Min}}\ f(x) = 0$

Alors $f\left(\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]\right) = \left[0;\frac{1}{4}\right]$

x	$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$
f'(x)		−	0	+	
f	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$

VI - IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION MONOTONE

Théorème (Admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b[$ (b fini ou infini)

- Si f est croissante et majorée sur $[a;b[$ alors f admet une limite finie en b
- Si f est croissante et non majorée sur $[a;b[$ alors f tend vers $+\infty$ en b
- Si f est décroissante et minorée sur $[a;b[$ alors f admet une limite finie en b
- Si f est décroissante est non minorée sur $[a;b[$ alors f tend vers $-\infty$ en b

Exercice

Soit f une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout entier naturel n $f(n) = n+1$ .Etudier la limite de f en $+\infty$

Solution

Montrons que f n'est pas majorée

Soit M un réel strictement positif et $x = E(M)$

On a $x \in \mathbb{N}$ donc $f(x) = x+1 > M$ donc f n'est pas majorée

Par suite f est croissante et non majorée alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Image d'intervalles par une fonction monotone

Théorème (Admis)

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature

Dans ce qui suit, a et b sont deux réels et f est une fonction continue sur un intervalle I

Intervalle I	Si f est croissante sur I	Si f est décroissante sur I
$I = [a;b]$	$f(I) = [f(a);f(b)]$	$f(I) = [f(b);f(a)]$
$I = [a;b[$	$f(I) = \left[f(a); \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim_{x\to b^-} f(x); f(a)\right]$
$I =]a;b]$	$f(I) = \left]\lim_{x\to a^+} f(x); f(b)\right]$	$f(I) = \left[f(b); \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$I =]a;b[$	$f(I) = \left]\lim_{x\to a^+} f(x); \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim_{x\to b^-} f(x); \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$I = [a;+\infty[$	$f(I) = \left[f(a); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x); f(a)\right]$
$I =]a;+\infty[$	$f(I) = \left]\lim_{x\to a^+} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$I =]-\infty;a]$	$f(I) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x); f(a)\right]$	$f(I) = \left[f(a); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$I =]-\infty;a[$	$f(I) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x) \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim_{x\to a^+} f(x); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[$

Remarque

L'image d'un intervalle par une fonction continue, strictement monotone est un intervalle de même nature

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ par $f(x) = \tan(\pi x)$. Déterminer $f\left(\left]-\frac{1}{2};0\right[\right)$