SÉRIE D'EXERCICES

Thème : Probabilité

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01

Un lot de tulipes a un pouvoir germinatif de 80% ; cela signifie que l'on considère que chaque bulbe a une probabilité égale à $\frac{4}{5}$ de produire une fleur et cela indépendamment des autres bulbes

Chaque bulbe contient l'un des trois gènes R (rouge), B (blanc) et J (jaune) qui détermine la couleur de la future fleur éventuelle

On suppose que la probabilité pour qu'un bulbe possède la gène R est $\frac{1}{2}$, la probabilité pour qu'un bulbe possède la gène B est $\frac{1}{10}$, et la probabilité pour qu'un bulbe possède la gène J est $\frac{2}{5}$,

1) a) Tracer un arbre pondéré traduisant la floraison d'un bulbe

b) Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur rouge ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur blanche?

2) Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre k de fleurs rouges obtenues après avoir planté 5 bulbes. (La plantation de 5 bulbes est assimilée à 5 tirages avec remise)

a) Vérifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres

b) Déterminer la loi de probabilité de X

c) Déterminer le nombre moyen des fleurs rouges qu'on peut obtenir à l'aide de 5 bulbes

Exercice 02

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne

Elle révèle que 40% des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35% des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons .Sur l'ensemble de la clientèle, 40% choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe

En fait, 60% des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20% des clients pour raison touristiques voyagent en première classe

On choisit au hasard un client de cette compagnie .On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi : On note

A l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »

T l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »

D l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »

V l'événement « le client interrogé voyage en première classe »

1) Déterminer $p(A)$, $p(T)$, $p(V)$, $p(V / A)$ et $p(V / T)$

2) a) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles

b) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques

c) En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques

3) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe

4) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On choisit n clients de cette compagnie de façon indépendante et on note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe

a) Prouver que $p_n = 1-(0,4)^n$

b) Déterminer le plus petit entier n pour le quel $p_n \geq 0,9999$

Exercice 03

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 .Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6
- Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé est 6

A la fin de la partie le jeton est remis dans le sac

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne »

Partie A

1) Montrer que $p(G)=\dfrac{7}{30}$ (On pourra s'aider d'un arbre pondérés)

2) Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3) Un joueur fait n parties de façon indépendante (n est un entier supérieur à 2)

a) Calculer la probabilité p_n qu'il en gagne au moins une

b) Quel nombre minimal de parties doit il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit strictement supérieure à $0,99$?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent

Chaque joueur paie un dinar par partie

- Si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 dinars
- Si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie

1) Donner la loi de probabilité de X

2) Prouver que le jeu est défavorable à l'organisateur

3) L'organisateur décide modifier le nombre m de jetons noirs ($m \in \mathbb{N}^*$) tout en gardant un seul jeton blanc pour quelles valeurs de l'entier m le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

Exercice 04

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts

1) Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à $0,0494$.

2) Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux

a) Définir la loi de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X .quel est le sens de ce nombre ?

3) a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A .Calculer, à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande

b) Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %.

Déterminer la valeur maximale du nombre n d'article qu'il peut commander

4) La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,0007 Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1000 jours.

Exercice 05

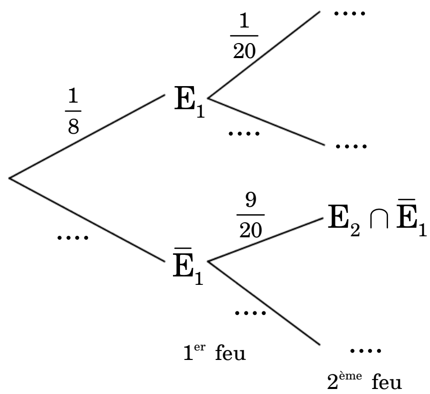
Amélie est en vacances dans une très grande métropole .Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'événement « Amélie est arrêtée par le $n^{\text{ième}}$ feu rouge ou orange et p_n la probabilité de E_n

La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- La probabilité que le $(n+1)$ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n^{\text{ième}}$ feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$
- La probabilité que le $(n+1)$ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n^{\text{ième}}$ feu est vert, est égale à $\frac{9}{20}$



1) On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

a) Recopier et compléter l'arbre pondérée ci- contre

b) On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores .

Déterminer la loi de probabilité de X

c) Calculer l'espérance mathématique de X

2) On se place maintenant dans le cas général.

Montrer que $\forall n \geq 1$, $p_{n+1} = -\frac{2}{5}p_n + \frac{9}{20}$

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 28p_n - 9$

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison

b) Exprimer p_n en fonction de n

c) Déterminer la limite, si elle existe, de p_n quand n tend vers $+\infty$

Interpréter ce résultat