PROBLEMES DE REVISION

PROBLEME 1 ©

Thèmes abordées :

- fonctions exponentielles.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

A°/ Soit φ la fonction définie sur $[\,0,+\infty\,[$ par : $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$.

1°- Etudier les variations de φ et tracer sa courbe ξ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm.

2°- Montrer que φ réalise une bijection de IR sur un intervalle E que l'on déterminera . Tracer la courbe ξ' de φ^{-1} dans le même repère.

3°- Soit Δ la droite d'équation : $y = -x + 2$.

a) Montrer que Δ coupe ξ en un seul point A d'abscisse α et que $\alpha > 1$

b) Soit D la domaine du plan limité par ξ , ξ' et Δ . Calculer l'aire de D en fonction de α et vérifier que l'aire de D est égale à : $(2 - \alpha^2)\ 4\ cm^2$.

B°/On considère la fonction f de IR vers IR définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 - x e^{-x}}$

et soit $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

1°/ Montrer que pour tout $x \in IR$ on a : $x\ e^{-x} \leq \dfrac{1}{e}$.

2°/ Dresser le tableau de variation de f.

3°/ Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $1 \leq f(x) \leq \dfrac{e}{e-1}$.

En déduire un encadrement de I.

C°/ soit $n \in IN^*$ et on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-nx}\,dx$.

1°/a) Calculer J_1.

b) En utilisant deux intégrations par parties successives, montrer que : $J_2 = \frac{1}{4}(1 - \frac{5}{e^2})$.

2°/Pour $n \in IN^*$, on pose $u_n = 1 + J_1 + J_2 + \ldots + J_n$.

a) Montrer que pour tout $x \in IR$ on a :

$$1 + x e^{-x} + \ldots + x^n e^{-nx} = \frac{1 - (x e^{-x})^{n+1}}{1 - x e^{-x}}$$

b) En déduire que : $I - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x)\,dx$.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : .

$$0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n (e-1)}$$

d) En déduire un encadrement de $(I - u_n)$.

Etudier alors la convergence de la suite (u_n)

D°/ Soit g la fonction définie sur IR_+ par : $\begin{cases} g(t) = f(\text{Log } t) & \text{si } t > 0. \\ g(0) = 0 \end{cases}$

et F la fonction définie par : $F(x) = \int_1^x g(t)\,dt$.

1°/ Justifier l'existence de F(x) sur $[0, +\infty[$.

2°/ Montrer que F est dérivable sur IR_+ et calculer F'(x) .

3°/a) Montrer que pour tout $t > 0$ on a : $\text{Log } t - t + 1 < 0$.

En déduire que $\frac{t}{t - \text{Log } t} \leq t$.

b) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ on a : $\frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0$.

4°/ Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a :

$$1 + \frac{\text{Log } t}{t} \leq \frac{t}{t - \text{Log } t} \leq 1 + \text{Log } t$$

Encadrer alors F(x) pour $x \geq 1$ et calculer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

PROBLEME 2 ©

Thèmes abordées :

- fonctions logarithmes .
- Courbes représentatives et calcul d'aire.

- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sue $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x\,(\mathrm{Log}\, x)^n & \text{si } x > 0. \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

On pose ξ_n sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 2 cm.

A°- 1°/a) Montrer que f_n est continue à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0 .

c) Montrer que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$

2°/a) Dresser le tableau de variation de f_n suivant la parité de n.

(on distinguera les cas où $n = 1$ et $n \geq 3$)

b) Montrer que toutes les courbes ξ_n passent par trois points fixes : l'origine du repère et deux autres points A et B tels que x_A et x_B vérifiant : $0 < x_A < x_B$.

3°/a) Etudier la position relative de ξ_1 et ξ_2 puis construire ξ_1 et ξ_2 dans le même repère.

b) Calculer, en cm², l'aire de la partie du plan limitée par ξ_1 et ξ_2 eles droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$.

B°- On pose $F_n(\alpha) = \int_\alpha^1 f_n(x)\,dx$, avec $n > 0$ et $\alpha \in]0,1[$.

1°/ a) Sans calculer $F_n(\alpha)$, prouver que $F_n(\alpha)$ admet une limite finie notée u_n lorsque α tend vers 0^+ .

b) Calculer $F_1(\alpha)$, en déduire que $u_1 = -\frac{1}{4}$.

2°/a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$ et pour tout $n > 0$ on a :

$$F_{n+1}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\mathrm{Log}\,\alpha)^{n+1} - \frac{n+1}{2}F_n(\alpha).$$

b) En déduire que pour tout n > 0 on a : $u_{n+1} = -\dfrac{n+1}{2} u_n$.

3°/ Soit A_n ,l'aire en cm², de la partie du plan limitée par ξ_n , l'axe des abscisses et les droites : x = 0 et x = 1.

a) Montrer que : $A_n = 4 \left| u_n \right|$ cm² .

b) Montrer que pour tout n > 0 on a : $A_n = \dfrac{n!}{2^{n-1}}$.

c) Montrer que pour n ≥ 3 , on a : $A_{n+1} \geq 2 A_n$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

C°/ On pose $G(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} t \operatorname{Log} t \, dt$ pour tout $x \in$ IR.

1°/ a) Sans calculer G (x) ; Montrer que G est dérivable sur IR et calculer G' (x) .

b) Déterminer le sens de variation de G .

2°/ a) Calculer G (x) en fonction de x.

b) Dresser le tableau de variation de G .

PROBLEME 3 ©

Thèmes abordées :

- fonctions exponentielles.
- Bijections
- Solutions de g(x) = 0 et signe de g(x)
- Nombres complexes et ensemble des points .

A°- Soit f la fonction définie par $f(x) = x \cdot \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$.

1°/ Déterminer le domaine de définition de f .

2°/ Soit g la fonction définie sur [0, +∞ [par : $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$.

a) Dresser le tableau de variation de g .

b) En déduire que la courbe de g coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α tel que : $\frac{\text{Log}\,2}{2} < \alpha < 1$.

c) Etudier le signe de g (x) sur $[0, +\infty[$.

3°/ Montrer que pour x > 0 on a :

$$\text{Log}\,[\,f(x)\,] = \frac{1}{x}[1 + x\,\text{Log}\,x] + \frac{1}{2}\text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}}) \quad .$$

En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

4°/ a) Montrer que $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sqrt{\frac{1}{\alpha - \alpha^2}}$.

b) Exprimer f' (x) en fonction de $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Etudier la position relative de ξ_f et $\Delta : y = x$.

e) Tracer ξ_f , Δ et dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B°- 1°/ Montrer que la restriction h de f à $]\frac{1}{\alpha}, +\infty[$ est une bijection de $]\frac{1}{\alpha}, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2°/ a) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J.

b) Tracer la courbe ξ' de h^{-1} dans le même repère .

3°/ Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in$ IN on a : $\frac{\text{Log}\,2}{2} \leq u_n \leq 4$.

b) Etudier la monotonie de (u_n) . En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

C°/- Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit ψ l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe tel que $z \in \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \neq 1 \}$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\bar{z}}{\text{Log}|z|}$.

1°/Déterminer les coordonnées X et Y du point M' en fonction des coordonnées x et y du point M.

2°/On pose E l'ensemble des points M'= ψ (M) lorsque M décrit la droite d'équation x = 1 privée du point d'affixe 1.

Montrer que E est la réunion de la courbe ξ_f et d'une autre courbe ζ obtenue à partir de ξ_f par une transformation simple que l'on précisera.

PROBLEME 4 ©

Thèmes abordées :

- fonctions exponentielles et Logarithmes.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

Soit f_n la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^n}$; $n \geq 0$.

On note ξ_n sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; unité graphique 2cm.

A°-1°/a) Etudier les variations de f_1 et f_2 .

b) Etudier la position relative de ξ_1 et ξ_2 .

Construire ξ_1 et ξ_2 dans le même repère.

c) Calculer , en cm², l'aire de la partie du plan limitée par ξ_1, ξ_2 et les droites d'équations : x = 0 et x = 1.

2°/ Soit u_n la valeur minimale de f_n sur $[-1,+\infty[$.

a) Montrer que : $u_n = f_n(n-1)$.

b) Pour $x \geq 0$, comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.En déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{Log}(u_n)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. .

B°/ Pour $x \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\text{Log}\,x} f_2(t)\,dt$.

1°/ Justifier l'existence de F(x) pour x $\in]\frac{1}{e},+\infty[$.

2°/ Montrer que pour tout x $\in]\frac{1}{e},+\infty[$ on a : $F(x) \le x(1-\frac{1}{\text{Log}\,x+1})$.

En déduire $\lim\limits_{x \to (\frac{1}{e})^+} F(x)$.

3°/ a) Montrer que pour tout x > $\frac{1}{e}$ on a :

$$F(x) = \frac{x}{(\text{Log}\,x+1)^2} - 1 + 2\int_0^{\text{Log}\,x} f_3(t)\,dt$$

b) En déduire que pour tout x ≥ 1 on a : $F(x) \ge \frac{x}{(\text{Log}\,x+1)^2} - 1$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

4°/ Montrer que la fonction F est une bijection de $]\frac{1}{e},+\infty[$ sur IR.

C°/Pour n ≥ 1 on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1°/ Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2°/ a) Montrer que pour tout n > 2 on a :

$$\frac{1}{n-1}(1-\frac{1}{2^{n-1}}) \le I_n \le \frac{e}{n-1}(1-\frac{1}{2^{n-1}}).$$

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

3°/ a) Exprimer $f_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

b) En déduire une relation entre I_n et I_{n+1} et montrer

que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,I_{n+1} = 1$

PROBLEME 5 :

Thèmes abordées :

- Etude de fonctions.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

A°- Soit f une fonction continue sur IR. On considère la fonction F

définie sur IR par : $F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$

1°/ a) Montrer que F est dérivable sur IR et que :

$$F'(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{1+x^2}.$$

b) Calculer F(0). En déduire que si f est impaire alors F est nulle.

c) Montrer que si f est paire alors pour tout réel x on a :

$$F(x) = 2\int_{0}^{x} \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$$

2°/ Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{3x^2+2x+3}{1+x^2}$.

a) Etudier g et tracer sa courbe ξ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) En utilisant 1°/ montrer que : $\int_{-x}^{x} g(t)\,dt = 6x$.

c) Calculer , en cm², l'aire de la partie du plan limitée par ξ , l'axe des abscisses et Les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

B°- Soit G la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ par : $G(x) = \int_{0}^{\operatorname{tg} x} \frac{dt}{1+t^2}$.

1°/ a) Montrer que G est dérivable sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ et calculer G' (x).

b) Calculer G (0) et déduire $G(\frac{\pi}{8})$.

2°/ On définie la suite (u_n) par : $u_0 = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$$

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a :

$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

b) Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

c) Calculer alors : u_1, u_2 et u_3.

3°/ Soit (v_n) la suite définie sur IN par : $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k} x^{2k} = \frac{1+(-1)^{n+1} x^{2n}}{1+x^2}$$

b) En déduire que : $v_n = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$.

c) Exprimer alors v_n en fonction de u_{n+1} et u_0 et en déduire que (v_n) est convergente et calculer sa limite.

PROBLEME 6 :

Thèmes abordées :

- fonctions Logarithmes.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

A°- soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = -x \operatorname{Log}|x| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1°/Etudier les variations de f et tracer sa courbe ξ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Etudier la position relative de ξ et D : y = x.

2°/Calculer $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx$ .Déduire l'aire du domaine du plan limité par la courbe ξ , la droite D et l'axe des abscisses .

3°/ Pour tout réel x on pose : $G(x) = \int_{1}^{\cos x} f(t)\,dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur IR et calculer G'(x) .

b) Déterminer l'expression de G (x) pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

c) Déduire la valeur de $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(t)\,dt$.

B°-Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction h_n définie sur [0,1] par :

$$\begin{cases} h_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\,\mathrm{Log}\,x}{x^2 - 1} & \text{si } x \in\,]0,1[\\ h_n(0) = 0 \text{ et } h_n(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

1°/ a) Montrer que h_n est continue sur [0,1] .

b) Soit g_n la fonction définie sur [0,1] par :

$$\begin{cases} g_n(x) = x^{2n+1}\,\mathrm{Log}\,x & \text{si } x \in\,]0,1[\\ g_n(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que : $h_{n+1}(x) - h_n(x) = g_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$

2°/ Soit ($u_n(x)$) la fonction définie sur [0,1] par $u_n(x) = \int_{x}^{1} g_n(t)\,dt$

On note $u_n(0) = \int_{0}^{1} g_n(t)\,dt = \lim\limits_{n \to 0^+} u_n(x)$.

a) Calculer $u_n(x)$ pour $x \in\,]0,1[$.

b) Montrer que $u_n(0) = \dfrac{-1}{4(n+1)^2}$.

c) Calculer $G\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$; pour $k \in \mathbb{Z}$.

3°/ Soit $I_n = \int_0^1 h_n(x)\,dx$.

a) Démontrer que pour tout $n \in IN$ on a : $I_{n+1} - I_n = u_n(0)$.

b) Etudier les variations de la fonction φ définie sur $]0,1[$ par :

$$\varphi(x) = 2\,\mathrm{Log}\,x + \frac{1}{x} - x .$$

c) En déduire que si $0 < x < 1$ alors : $0 < \dfrac{x\,\mathrm{Log}\,x}{x^2-1} < \dfrac{1}{2}$.

d) Montrer alors que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $0 \le h_n(x) \le \dfrac{1}{2}x^{2n}$.

e) Montrer que pour tout $n > 0$ on a : $I_0 = \dfrac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right) + I_n$.

En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ en fonction de I_0 .

PROBLEME 7

Thèmes abordées :

- Fonctions Logarithmes.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

Soit n un entier naturel tel que $n \ge 1$.On considère la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{(\mathrm{Log}\,x)^n}{x^2}$.

ξ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A°-1°/ Etudier les variations de f_1 et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$

2°/Tracer la courbe ξ_1 ainsi que la tangente à ξ_1 au point d'abscisse 1.

B°-1°/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

2°/a) Calculer $f_n'(x)$ et vérifier que $f_n'(e^{\frac{n}{2}}) = 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f_n.

c) Vérifier que la valeur maximale de f_n sur $[1,+\infty[$ est :

$$y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n .$$

3°/a) Soit $x \in [1,+\infty[$. Etudier le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.

b) Préciser la position de ξ_1 et ξ_2 .

4°/ a) Soit $n \geq 1$. Calculer $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ pour $x > 1$.

b) Montrer que : $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} y_n$.

c) En déduire que : $y_{n+1} \leq \dfrac{1}{e \,.\, 2^n}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

C°-Pour tout $n \geq 1$ et $\forall x \in [1,+\infty[$, on pose : $F_n(x) = \displaystyle\int_1^x f_n(x)\,dx$.

1°/ a) Soit $k \geq 1$ un entier . En utilisant une intégration par parties,

montrer que : $F_{k+1}(x) = F_k(x) - \dfrac{(\operatorname{Log} x)^{k+1}}{x\,(k+1)!}$.

b) En déduire que pour $\forall$ $n \geq 2$ on a : $F_n(x) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\operatorname{Log} x)^k}{x\, k!}$

2°/ Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel fixé .

a) Montrer que : $0 \leq F_n(\alpha) \leq (\alpha - 1)\, y_n$.

b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(\alpha)$.

3°/ Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$ on pose : $V_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\operatorname{Log} x)^k}{k!}$.

a) Exprimer $V_n(x)$ en fonction de $F_n(x)$.

b) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n(\alpha)$; $\alpha \geq 1$ fixé.

c) En déduire la limite , lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite

(U_n) définie par : $U_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

PROBLEME 8

Thèmes abordées :

- fonctions exponentielles et Logarithmes.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

Soit $n \in IN^*$ et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x\, e^{-\frac{1}{nx}} & \text{si } x > 0. \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On note ξ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; unité graphique 4 cm.

A°-1°/ a) Montrer que f_n est continue sur $[0,+\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 0 .

c) Calculer $f_n'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que f_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

2°/a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

b) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(t) = e^{-t} - (1 - t)$.
Dresser le tableau de variation de g .
En déduire que pour tout $t \geq 0$ on a : $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$.

c) Soit $t \geq 0$; En intégrant par parties sur $[o,x]$, deduire que pour tout x positif on a : $0 \leq e^{-x} - (1 - x) \leq \dfrac{x^2}{2}$.

3°/a) Démontrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x} .$$

En déduire que la droite $D_n : y = x - \frac{1}{n}$ est une asymptote à ξ_n.

b) Préciser la position relative de ξ_n et D_n .

Tracer ξ_n et D_n pour $n = 3$.

4°/Dresser le tableau de variation de f_n .

5°/a) Tracer $\mathcal{C}_1$ et son asymptote D_1, préciser la tangente en O

b) Montrer que pour n > 0 on a $\mathcal{C}_n$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$.

c) Construire $\mathcal{C}_2$ sur le même graphique que $\mathcal{C}_1$.

6°/Pour tout n > 0 et pour tout $x \in [0,1]$ on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $f_n(x) \leq x$.

b) En déduire que pour tout n > 0 on a : $I_n \leq \frac{1}{2}$

c) Etablir que pour tout n > 0 on a : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{n}}$

d) Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$

B°-1°/ Démontrer que pour tout n > 0 l'équation : $x\ e^{-\frac{1}{nx}} = 1$ admet une seule solution notée : α_n telle que $\alpha_n > 0$.

2°/ Démontrer que α_n est une solution de l'équation : $x \operatorname{Log} x = \frac{1}{n}$.

3°/ Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $h(x) = x \operatorname{Log} x$.

a) Etudier les variations de h .

b) Prouver que : $1{,}76 < \alpha_n < 1{,}77$ pour $n \geq 1$.

c) Montrer que la suite (α_n) est décroissante.

d) En déduire qu'elle est convergente et vérifier que sa limite α est telle que $\alpha \geq 1$

e) Montrer que $h(\alpha) = 0$ et en déduire la valeur de α .

PROBLEME 9 :

Thèmes abordées :

- fonctions exponentielles.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

On considère la fonction F définie sur IR par : $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

A°/ 1°/ Justifier l'existence de F(x) sur IR .

2°/ Etudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.

3°/ a) Vérifier que pour tout $t \in [2,+\infty[$ on a : $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$.

En déduire que pour tout $x \geq 2$ on a :

$$F(x) \leq \frac{1-e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2}\,dt .$$

b) Prouver que pour tout $x \geq 2$ on a : $F(x) \leq \frac{1}{2\,e^4} + \int_0^2 e^{-t^2}\,dt$.

4°/ Montrer que F est majorée sur IR et que F possède une limite finie L en $+\infty$. (On ne demande pas de calculer cette limite)

B°/ Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}\,dt$.

1°/ Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$

et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2°/ On pose, pour tout x

$\in$ IR et pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$: $g(t) = F(x\,tg\,t)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et que :

$$g'(x) = \frac{x}{\cos^2 t}\,e^{-x^2\,tg^2 t} .$$

b) En déduire que pour tout $x \in$ IR on a : $F(x) = x . \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2\,tg^2 t}}{\cos^2 t}\,dt$.

3°/En admettant que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et que :

$$f'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}\,dt \;;$$

Prouver que pour tout $x \in IR$ on a : $[\,f(x^2)\,]' = -2\,e^{-x^2}F(x)$.

4°/ soit $h(x) = f(x^2) + [F(x)]^2$; pour tout $x \in IR$.

a) Montrer que h est une constante et calculer cette constante.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de la courbe de F .

C°/ On pose pour tout $n \in IN$ et $x \geq 0$: $U_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t^2}\,dt$

et $V_n = \lim\limits_{x\to+\infty} U_n(x)$.

1°/ Vérifier que $V_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2°/ a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $V_n = \frac{n-1}{2}V_{n-2}$.

b) En déduire que : $V_n.V_{n+1} = \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$.

c) Déterminer alors les termes V_3 et V_4 de la suite (V_n).

PROBLEME 10

Thèmes abordées :

- fonctions exponentielles . Famille des fonctions.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

A°/ Soit f la fonction définie sur IR_+ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\,(1-\text{Log}\,x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On désigne par ξ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°/ a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Préciser la tangente T à ξ au point d'abscisse e , et construire ξ et T .

2°/ Soit (u_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = e , \\ u_n . f'(u_{n+1}) = f(u_n) . \end{cases}$

a) Montrer que la suite u est géométrique et calculer u_n en fonction de n.

b) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, puis $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

3°/ Pour tout entier naturel k , on pose M_k et M_{K+1} les points de ξ d'abscisses u_k et u_{k+1}.

On note A_k l'aire du triangle OM_kM_{k+1}.

a) Montrer que $A_k = 2 [u_k \ f(u_{k+1}) - u_{k+1} f(u_k)]$ cm². Puis calculer A_k en fonction de k

b) Calculer $B_n = \sum_{k=0}^{n} A_k$, puis $\lim_{n\to+\infty} B_n$.

B°/ Soit p un entier naturel non nul et g_p la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} g_p(x) = x^p (1 - \mathrm{Log}|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ g_p(0) = 0. \end{cases}$$

On désigne par ξ_p sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/a) Etudier la parité de g_p.

b) dresser, suivant la parité de p , le tableau de variation de g_p.

2°/a) Montrer que toutes les courbes ξ_p passent par quatre points fixes.

b) Construire dans le même repère les courbes ξ_1 et ξ_2 .

3°/ On note $I_p(x) = \int_1^x g_p(t)\,dt$; pour tout $x \in]0,1]$ et $p \in IN^*$.

a) Calculer $I_p(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} I_p(x)$, et interpréter graphiquement cette limite notée I_p.

c) Calculer, en cm², l'aire de la partie du plan limitée par ξ_1 et ξ_2 et les droites d'équation : x = 0 et x = 1.

C°/ Soit G la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par $G(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{g_1(t)}{1+t^2}dt$.

1°/ a) Montrer que G est dérivable sur $]-\infty,0]$ et que :

$$G'(x) = \frac{e^{2x}(x-1)}{1+e^{2x}}.$$

b) En déduire le sens de variation de G sur $]-\infty,0]$

2°/ a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0]$ on a :

$$\frac{1}{2}\ I_1(x) \ \le\ G(x)\ \le\ \frac{1}{1+e^{2x}}\ I_1(e^x).$$

c) On admet que la limite de G(x) en $-\infty$ existe et finie et est notée ℓ.

d) Montrer qu'on a alors $\frac{3}{8} \le \ell \le \frac{3}{4}$.

PROBLEME 11

Le but de ce problème d'étudier la convergence de la suite

$$U_n(\alpha,\theta) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^k\theta}{k^\alpha}\ ;\ \text{Pour } 0 \le \alpha \text{ et } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Partie I :

Soit $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et $x \in IR^*_+$

1) étudier f_α
2) tracer la courbe représentative C_α de f_α

Partie II

Dans cette partie on suppose que θ = 0

A°/ Montrer que $U_n(0,0)$ est divergente

B°/ On suppose que $\alpha = 1$.

1) Montrer que $\frac{1}{k+1} \leq \int_x^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$

2) En déduire que $U_n\,(1, 0)$ divergente

C°/ Supposons que $0 < \alpha < 1$

1) Montrer que $U_n(1,0) \leq U_n\,(\alpha, 0)$

2) Montrer que $U_n(\alpha,0)$ est divergente

D°/ Supposons que $\alpha > 1$

1) Montrer que $U_n(\alpha,0) - 1 \leq \frac{1}{1-\alpha}\,[\frac{1}{n\alpha - 1} - 1]$

2) Montrer que $U_n(\alpha,0)$ convergente et que sa limite ℓ vérifie :

$$0 \leq \ell \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Partie III

Dans cette partie on suppose que $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

A°/ si $\theta = \frac{\pi}{2}$, montrer que $U_n\,(\alpha,\theta)$ convergente

B°/ 1) supposons que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^k \theta$

Montrer que $|S_n| \leq \frac{\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

2) Montrer que $U_n(\alpha,\theta) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(S_n - S_{n-1})}{k^\alpha} + \cos\theta$

3) En déduire que $U_n\,(\alpha,\theta) = \sum_{k=2}^{n-1} S_n\,(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}) + \frac{S_n}{n^\alpha} + \frac{\cos\theta}{2}$

4) Montrer que $|\,U_n\,(\alpha,\theta)\,| \leq \frac{\cos\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}[\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \sin(2\theta)]$

5) En déduire après l'étude de monotonie de $U_n(\alpha,\theta)$ que cette suite converge

Partie VI (facultatif)

1) Montrer que $g_n :]0, \frac{\pi}{2}] \to IR$

$$\theta \to U_n(\alpha,\theta)$$

est dérivable sin $]0, \frac{\pi}{2}]$ et montrer que $g'_n(\theta) = tg\,\theta \,.\, U_n(\alpha-1, \theta)$

2) en déduire que $g'_n(\theta)$ converge pour $\alpha \geq 1$ et calculer sa limite pour $\alpha = 1$

3) pour quelle valeur de α la suite $(g_n^{(p)}(\theta))$ est convergente si $p \geq 1$.

Finalement on peut amuser avec la suite $V_n(\beta, \theta) = \sum_{k-1}^{n} \sin\theta$

PROBLEME 12

Le but de ce problème est de calculer la limite L de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$$, puis la limite de la suite $n \mapsto n(S_n - L)$

1°/ Soit f la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$. Montrez que pour tout naturel $n \geq 1$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2°/ Soit φ une fonction continue et croissante sur [0, 1].

a) Prouvez que pour tous les naturels k et n tels que $1 \leq k \leq n - 1$:

$$\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x)\,dx$$

b) Prouvez que pour tus les naturels k et n tels que $1 \leq k \leq n$:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \varphi(x)\,dx \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

c) Déduisez du 2.a) un encadrement de $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k-1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$, puis

prouvez que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_d^1 \varphi(x)\ dx$

Montrez que ce dernier résultat est encore valable si φ est décroissante sur [0, 1] au lieu d'être croissante en considérant la fonction (- φ) .

1) Prouvez que $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et explicitez sa limite L.

2) Démontrez que : $S_n - \int_0^1 f(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) dx$

c) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, prouvez que : $\left(\frac{k}{n} - x\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \leq \left(\frac{k}{n} - x\right) f'\left(\frac{k-1}{n}\right)$

où k et n sont des naturels tels que $1 \leq k \leq n$ et x un réel de $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$.

c) Prouvez, grâce aux résultats des deux précédentes questions,

que : $\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \leq S_n - \int_0^1 f(x)\ dx \leq \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k-1}{n}\right)$

d) Détèrminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [n(S_n - L)]$.

PROBLEME 13

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie]- ∞, 1[par :

$f_n(x) = x^n \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ et $f_0(x) = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right)$. On désigne par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A°/ 1°/ on pose, pour tout x de]- ∞, 1[; $h_n(x) = \frac{x}{x-1} - n \operatorname{Log}(1-x)$.

a) Etudier le sens de variations de h_n.

b) Calculer $h_n(0)$ et en déduire le signe de $h_n(x)$.

2°/a) Dresser, suivant la parité de n, le tableau de variation de f_n.

b) Tracer dans le même repère R, les courbes (C_1) et (C_2), en précisant la position relative de deux courbes.

3°/ On pose pour tout x de]- ∞, 1[, $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\ dt$

a- Montrer que pour tout n de IN^* on a :

$$F_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1}\ dt .$$

b- Vérifier que pour tout t de]- ∞, 1[on a :

$$\frac{t^{n+1}}{t-1} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots.. + t^n - \frac{1}{1-t}$$

c- En déduire que pour tout n de IN^*, et pour tout x de]- ∞, 1[on a :

$$(n+1)\ F_n(x) = x^{n+2} \text{ Log} \left(\frac{1}{1-x}\right) + x + \frac{x^2}{2} + \ldots. + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{Log}(1-x)$$

4°/a- Calculer $F_2(\frac{1}{2})$ et $F_1(\frac{1}{2})$.

b- En déduire l'aire du domaine limité par les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations respectives x = 0 et x = $\frac{1}{2}$

B°/ 1°/ Pour tout x ∈ [0, 1[, on pose, $F_0(x) = \int_0^x f_0(t)dt$

a) En remarquant que pour tout x de]- ∞, 1[on a : $f_0(x) = -\text{Log}(1 - x)$
Etudier les variations de f_0 et Tracer C_0

b) Montrer que pour tout x de [0, 1[on a : $F_0(x) = (1-x)\ \text{Log}(1-x) + x$.

c) Donner une interprétation géométrique du réel $F_0(\alpha)$ pour $\alpha \in [0, 1[$.

2°/ Soit f une fonction deux fois dérivables sur [a, b] ; (a < b) et vérifiant pour tout t de [a,b] ; $f''(t) < 0$.

Pour tout x de [a,b], on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \frac{1}{2}(x - a)\ [\ f(a)+ f(x)\ ]$

a- Calculer F'(x) et F''(x) pour x ∈ [a ,b].

b- Etudier le sens de variation de F' sur [a,b].

c- En déduire le signe de F'(x).

d- Montrer alors que $\int_a^b f(t)\ dt < \frac{1}{2}(b - a)\ [\ f(a) + f(b)\ ]$.

C°/ Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (v_n) définie par :

$$V_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \quad ; \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

1°/ a- Vérifier que pour tout $n \geq 2$ on a : $v_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}}$

b- En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $\text{Log}(v_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f_0(\frac{k}{n})$

2°/a- Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n-2$ on a :

$$\frac{1}{n} f_0(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f_0(t)\ dt \leq \frac{1}{2n}\left[f_0(\frac{k}{n}) + f_0(\frac{k+1}{n}) \right]$$

(on pourra utiliser les résultats de la partie **B/2**))

b- En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\text{Log}(v_n) + \frac{1}{n}\ \text{Log}(\frac{1}{n}) \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_0(t)\ dt \leq \text{Log}(v_n) + \frac{1}{2n}\text{Log}(\frac{1}{n})$$

3) a- Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{2n}\text{Log}\,(\frac{1}{n}) + 1 - \frac{1}{n} \leq \text{Log}\,(v_n) \leq 1 - \frac{1}{n}$$

b- Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$

PROBLEME 14

A°/ Pour tout $x \in IR^*_+$; $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt$

Le but de cet problème est de dégager quelques propriétés de la fonction F définie par une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

1) Déterminer

a) le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

2) Montrer que pour tout $t \in IR^*_+$ on a : $\left|\frac{\cos(t)}{t}\right| \leq \frac{1}{t}$

Et que pour tout $x \in IR^*_+$; $|F(x)| \leq \text{Log } 3$.

3) Démontrer que pour tout $t \in IR^*_+$:

$\text{Log } 3 - F(x) = 2\int_x^{3x} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t} dt$ et que : $0 \leq \text{Log } 3 - f(x) \leq 2x^2$

En déduire que F admet une limite à droite au point O.

4) Soit m la fonction définie sur IR^*_+ par : $m(x) = \frac{\text{Log } 3 - f(x)}{x}$

Etudier la limite de m à droite au point O.

B°/ Soit G la fonction réelle telle que pour tout $x \in IR^*_+$:

$$\begin{cases} G(x) = F(x) \\ G(0) = \text{Log } 3 \end{cases}$$

1) Démontrer que G est continue sur IR_+.
2) En exploitant la méthode d'intégration par parties, établir que pour tout

$x \in IR^*_+$ on a : $\left| G(x) - \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} \right| \leq \frac{2}{3x}$

En déduire que pour tout $x \in IR^*_+$; $|G(x)| \leq \frac{2}{x}$ et étudier la limite de G en $+\infty$

3) Démontrer que F est dérivable sur IR_+ et que pour tout $x \in IR^*_+$ on a :

$$G'(x) = \frac{-4\cos x . \sin^2 x}{x}$$

4) Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels la fonction G présente un extremum.

Déterminer les intervalles sur lesquelles G est :

a- croissante ;

b- décroissante

5) On désigne par G_1 la restriction de G à l'intervalle $[0, 2\pi]$. Donner le tableau de variations de G_1 sans préciser les valeurs des extremums et en déduire que, sur $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$,

G_1 admet une solution.

PROBLEME 15

Soient x un réel strictement supérieur à ε ($\varepsilon > 0$), $n \in IN^*$ et f une fonction numérique de la variable réelle définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$.

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle donnée par :

$$\forall\ n \geq 1, \quad U_n = \sum_{p=1}^{n} f(\frac{p}{n^\alpha}) = f(\frac{1}{n^\alpha}) + ... + f(\frac{n}{n^\alpha})$$

1) Vérifier que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est bien définie.

2) a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $p \in \{1, ..., n\}$ il existe $C_{(n,p)} \in]0, 1[$ tel que :

$$f(\frac{p}{n^\alpha}) = f(0) + \frac{p}{n^\alpha} f'(0) + \frac{p^2}{2n^{2\alpha}} f''(C_{(n,p)})$$

b- En déduire que pour tout $n \in IN^*$:

$$U_n - n\ f(0) - \frac{n(n+1)}{2n^\alpha} f'(0) = \frac{1}{2n^{2\alpha}} \sum_{p=1}^{n} p^2 f''(C_{(n,p)})$$

3) a- Montrer par récurrence que $\forall \in IN^*$, $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b- En posant $M = \sup|f''(x)|$, montrer que $\forall \in IN^*$, $x \in [0, 1]$.

$$\text{On a : } \left| U_n - n\ f(0) \right| - \frac{n(n+1)}{2n^\alpha} f'(0) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^{2\alpha}} \pi$$

c-Déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, définie par :

$$\forall\ n \geq 1, : \quad v_n = U_n - n\ f(0) - \frac{n(n+1)}{2n^\alpha} f'(0)$$; converge vers 0

4) On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

PROBLEME 16

Soit $n \in IN$ et f_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{1 + \text{Log } x}{x}$

On désigne par ζ_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

A°/ On suppose dans cette partie que $n = 0$ et on pose :

$$F(x) = \int_1^x f_0(t)dt \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

1) a- Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$, $F(x) = x \text{ Log } x$

   b- Montrer que F réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Soit $k \in IN$. Montrer que l'équation $F(x) = k$ admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α_k. Calculer α_0

3) * Montrer que la suite $(\alpha_k)_{k \in IN}$ est strictement croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

   * Montrer que $\forall k \in IN$: $\displaystyle\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f_0(t)\ dt = 1$

   * En utilisant le théorème de la moyenne, montrer qu'il existe β_k Tel que $f_0(\beta_k) = \dfrac{1}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}$.

   En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) = 0$.

PROBLEME 17

A°/ 1) Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ pour $\varphi(t) = e^t + t \text{ Log } t - 1$.

Calculer $\varphi'(t)$ et montrer que l'équation $\varphi'(t) = 0$ admet dans $]0,1]$ une solution unique α .

Etudier les variations de φ . déduire qu'il existé un réel unique $\beta \in]0, 1[$ tel que $\varphi(\beta) = 0$. Préciser le signe de $\varphi(t)$ sur $]0, +\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(t) = (1 - e^{-t}) \text{ Log } t \text{ si } t > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a- Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat .

c- Montrer que $\forall\ t > 0$: $f'(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}\varphi(t)$.

d- Etudier les variations de f et tracer sa courbe ζ dans un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on prendra $\beta = 0.3$).

B°/ On définie sur I = [0, 1] les fonctions :

$$g_0(t) = 1 \text{ et } \forall\ n \in IN^*;\ g_n(t) = 1-t+\frac{t^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{n!}.$$

1) Montrer que $\forall\ n \in IN^*$ on a : $g'_n(t) = -\,g_{n-1}(t)$.

2) Montrer que $\forall\ t \in I$ on a : $g_1(t) \leq e^{-t} \leq g_o(t)$.

3) Soit un réel de l'intervalle]0, 1]; on pose pour $n \in IN$:

$$I_n(7) = \int_7^1 t^n \operatorname{Log} t\ dt$$

Calculer $I_n(7)$ et $\lim\limits_{7\to 0^+} I_n(7)$.

4) a- Prouver que pour tout $t \in]0, 1]$:

$$(1-g_{2n+1}(t))\operatorname{Log} t \leq f(t) \leq (1-g_{2n}(t))\operatorname{Log} t$$

b- Déduire que : $-\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k t^k \operatorname{Log} t}{k!} \leq f(t) \leq -\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{t^k \operatorname{Log} t}{k!}$

c- Montrer alors que : $-\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!}I_k(7) \leq \int_7^1 f(t)dt \leq -\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}I_k(7)$

5) Pour $x \in [0,1]$; on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)dt$

a- Montrer que F est continue sur [0, 1].

b- Déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2 k!} \leq F(0) \leq \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2 k!}$

6) On prend n = 2 ; donner un encadrement de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

PROBLEME 18 :

A°/ Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+\frac{3}{2})\, e^{-x} - \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\mathrm{Log}(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ unité graphique 2 cm.

1) a- Montrer que f est continue sur IR .

b- Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$ et calculer pour chaque cas f'(x).

2) a- Vérifier que $\forall\, t \in IR_+$ on a : $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$ et que :

$\forall\, t \in IR_+$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \mathrm{Log}\,(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$

b- Montrer alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

3) Soit φ la fonction définie sur IR_+ par $\varphi(x) = \frac{x}{1+x} - \mathrm{Log}(1+x)$.

a- Etudier les variations de φ. En déduire le signe de $\varphi(x)$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

Construire ζ et la tangente à ζ en A(0, 1).

4) Pour tout $x \in IR_+$ on pose $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

a- Montrer que F est dérivable sur IR_+ et que $\forall\, x \in IR_+$:

$$F(x) = f(x+1) - f(x).$$

b- En déduire le sens de variation de F.

c- Montrer que $\forall\, x \in IR_+$ il existe $c \in [x, x+1]$ tel que $F(x) = f(c)$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

B°/ Dans cette partie g désigne la restriction de f à l'intervalle [0, 1].

Pour tout $n \in IN^* - \{1\}$ on note : $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} g(x)\, dx$;

$$b_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} g(x)\, dx \quad \text{et } I = \int_0^1 g(x)\, dx$$

1°/ Déterminer que $\forall t \in [0, 1]$ et $\forall n \in IN^*-\{1\}$;

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^{n-2}t^{n-2}+\frac{(-1)^{n-2}}{1+t}$$

avec $P_{n-1}(x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}$

2°/ a) Vérifier que $\forall x \in [0,1]$; $\text{Log}2 \leq 1$; en déduire que

$$\frac{\text{Log}2}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}$. En dédire que (b_n) converge vers le réel I.

3°/ a- Montrer que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^{n-1}dt$

et que : $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{n}$

b- En déduire que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $\left| g(x)-\frac{P_{n-1}(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{nx}$

4°/ On pose $D_n(x) = x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}$

avec $x \in [0,1]$ et $n \in IN^*-\{1\}$

a) Montrer que $\forall n \in IN^*-\{1\}$;

$$b_n + S_n(\frac{1}{n}) - \frac{\text{Log}n}{n} \leq S_n(1) \leq b_n + S_n(\frac{1}{n}) + \frac{\text{Log}n}{n}$$

b) Vérifier que $\forall x \in [0, 1]$ et $\forall p \in IN^*$ on a : $\frac{x^p}{p^2} \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}$.

En déduire $\forall n \in IN^*-\{1\}$ et $x \in [0, 1]$ on a : $0 \leq S_n(x) \leq x$

(on distinguera deux cas n paire et n impaire).

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\frac{1}{n})$. Déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(1) = I$

PROBLEME 19

A°-Soit g la fonction définie sur]0,1] par $g(x) = \sqrt{\mathrm{Log}\,\frac{1}{x}}$.

1°/a) Montrer que g est dérivable sur)0,1[.

g est – elle dérivable à gauche en 1 ?

b) Dresser le tableau de variation de g et tracer sa courbe ξ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

2°/a) Montrer que g réalise une bijection de]0,1] sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit h la fonction réciproque de g. Expliciter h(x) pour tout $x \in J$

c) Tracer la courbe de h dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

B°- On considère la fonction F définie sur IR par : $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

1°/ Montrer que F est dérivable sur IR et calculer F' (x) .

2°/ Etudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.

3°/ a) Vérifier que pour tout $t \in [2,+\infty[$ on a : $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$.

En déduire que pour tout $x \geq 2$ on a :

$$F(x) \leq \frac{1-e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2}dt\,.$$

b) Prouver que pour tout $x \geq 2$ on a : $F(x) \leq \frac{1}{2\,e^4} + \int_0^2 e^{-t^2}dt$.

4°/ Montrer que F est majorée sur IR et que F possède une limite finie ℓ en $+\infty$.

(On ne demande pas de calculer cette limite)

C°-1°/ Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$G(x) = F(x\sqrt{n})\ ;\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Montrer que G est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer G' (x) pour $x \in [0,+\infty[$.

b) En déduire que $\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt$

2°/a) Montrer que pour tout réel t on a :

$$e^t \geq 1 + t \text{ et que pour tout } t \geq 0 \text{ on a} : e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}.$$

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$ on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \geq \sqrt{n}\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx$$

et que : $\displaystyle\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$.

D°- On pose pour tout $n \in IN^*$: $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$ et $v_n = (n+1)u_n u_{n+1}$.

1°/ a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}u_n$.

En déduire que la suite (v_n) est constante.

c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2°/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \text{ et calculer } \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

3°/ a) Vérifier que pour tout $n \in IN^*$ on a : $\sqrt{n}\;u_n = \sqrt{\dfrac{u_n}{u_{n-1}}.v_{n-1}}$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\;u_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = 0$.

4°/Montrer que $u_{2n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx$ et que

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\,dx.$$

5°/ En déduire que pour tout $n \in IN^*$on a :

$$\sqrt{n}\;u_{2n+1} \leq G(1) \leq \sqrt{n}\;u_{2n-2}.$$

6°/ Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} G(1) = \ell = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

CORRECTION

PROBLEME 1

A/ $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$ pour $x \in [0, +\infty[$.

1°/ La fonction φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\varphi'(x) = e^{-x} > 0$ pour $x \geq 0$ donc φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = 1 \ . \quad \varphi(0) = 0$$

Tableau de variation de φ :

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	1

la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe de φ en $+\infty$

on remarque que : $\varphi(x) - x < 0$ donc ξ est au-dissous de la droite d'équation $y = x$.

2°/la fonction φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc φ est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $\varphi([0,+\infty[) = [0, 1[$.

La courbe ξ' de la fonction réciproque φ^{-1} est la symétrique de ξ par rapport la droite d'équation $y = x$.

3°/ $\Delta : y = -x + 2$

a) soit $h(x) = \varphi(x) - (-x + 2) = \varphi(x) + x - 2$

on a : $h'(x) = \varphi'(x) + 1 = e^{-x} + 1 > 0$ car $e^{-x} > 0$ et on a :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (\varphi(x) + x - 2) = +\infty$$

soit le tableau de variation de h :

x	0	α	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	-2	0	$+\infty$

Ainsi on a : h est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[-2,+\infty[$.

Or $0 \in [-2,+\infty[$ donc 0 admet un seul antécédent α par h , donc il existe un seul réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Cela signifie que l'équation $\varphi(x) = -x + 2$ possède une seule solution α ou bien que la droite $\Delta : y = -x + 2$ coupe ξ en un seul point d'abscisse $\alpha > 0$.

Vérifions que $\alpha > 1$:

On a : $\alpha = h^{-1}(0)$ car $h(\alpha) = 0$ et h est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[-2,+\infty[$.

$h(1) = 1 - e^{-1} + 1 - 2 = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$ donc $h(1) < 0$

donc $h^{-1}(h(1)) < h^{-1}(0)$ car h^{-1} est croissante puisque h est croissante ,donc, et comme

$h^{-1}oh = Id_{IR}$, on a : $1 < \alpha$.

B°/ D est la partie du plan limitée par ; ξ , ξ' et Δ .

On pose D_1 la partie du plan limitée par ξ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$, et soit $D_2 = S_{\Delta'}(D_1)$ où $\Delta' : y = x$

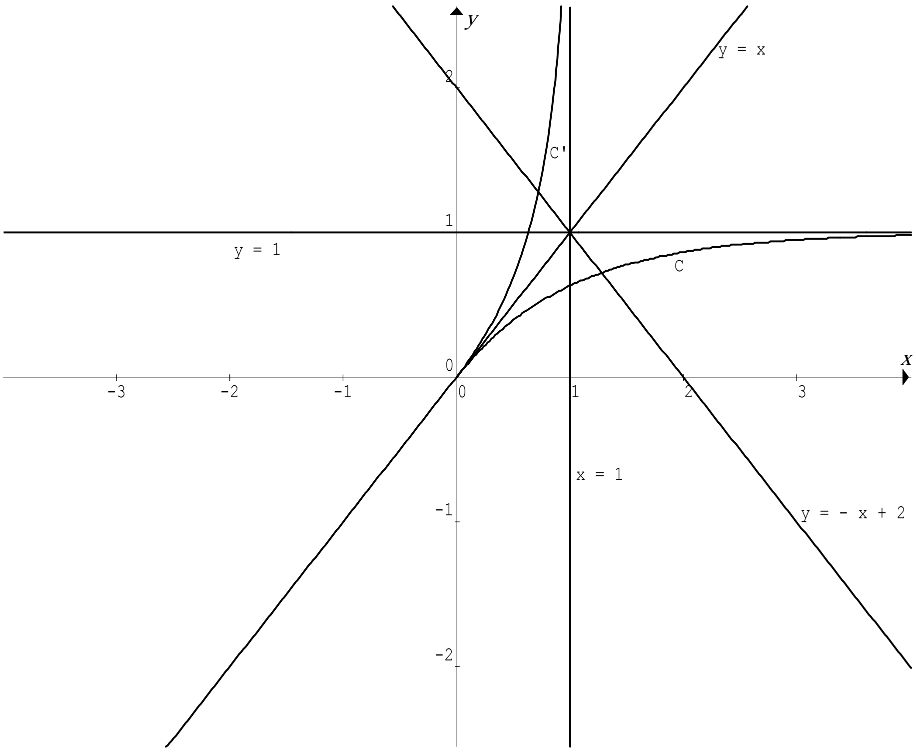
donc $A(D_1)= [2-2A(D_1)- 2 f(\alpha) (\frac{2-\alpha}{2})]x4\ cm^2$

c'est à dire $A(D_1) = (2 - 2A(D_1) - (2-\alpha)^2)\ 4\ cm^2$.

on a : $A(D_1) \int_0^{\alpha} (1 - e^{-x})\,dx = (\alpha + e^{-\alpha} - 1)\ 4\ cm^2$.

donc $A(D) = [2 - 2\alpha - 2e^{-\alpha} + 2- (2-\alpha)^2] \times 4$ cm, et on a : $e^{-\alpha} = \alpha - 1$ car $h(\alpha) = 0$ donc $A(D_1) = [2- 2\alpha - 2(\alpha-1)+2- 4 -\alpha^2 +4\alpha]\ 4\ cm^2$

donc $A(D) = (2 -\alpha^2) \times 4\ cm^2$.



B°/f (x) = $\frac{1}{1-x e^{-x}}$ pour x $\in$ IR et I = $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1°/ Montrons que pour tout x $\in$ IR on a : $x e^{-x} \leq \frac{1}{e}$

Soit g (x) = $x e^{-x} - \frac{1}{e}$; on a g est dérivable sur IR et $g'(x) = e^{-x}(1 - x)$;

on a $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

soit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	
g(x)		↗	0	↘	

g admet un maximum absolu en 0 égale à $-\frac{1}{e} < 0$ donc pour tout

x $\in$ IR ; on a : g (x) < 0 . Donc $x e^{-x} - \frac{1}{e} \leq 0$ d'où $x e^{-x} \leq \frac{1}{e}$.

2°/ la fonction f est dérivable sur IR et on a : $f'(x) = \dfrac{e^{-x}(1-x)}{(1-xe^{-x})^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-xe^{-x}} = = 1$ et :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1-xe^{-x}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} (-xe^{-x}) = +\infty$

soit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{e}{e-1}$	↘	1

$f(1) = \dfrac{1}{1-e^{-1}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{e}} = \dfrac{e}{e-1}$.

3°/ D'après la tableau de variation de f on a :

f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc :

$f(x) \geq 1$; pour $x \geq 1$.

Comme $f(0) = 1$ on a : $f(x) \geq 1$ pour $x \geq 0$.

On a de plus f admet un maximum absolu en 1 égale à f (1) .

Donc $f(x) \leq \dfrac{e}{e-1}$; pour $x \in IR$ et donc pour $x \geq 0$.

Conclusion : pour $x \geq 0$ on a : $1 \leq f(x) \leq \dfrac{e}{e-1}$.

On a : $1 \leq f(x) \leq \dfrac{e}{e-1}$.

Donc $\int_0^1 1\,dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 \dfrac{e}{e-1}dx$. D'où : $1 \leq I \leq \dfrac{e}{e-1}$

C°/ $n \in IN^*$ et $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}\,dx$.

1°) a) $J_1 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$.

On intègre par parties:

$u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x} \rightarrow v(x) = -e^{-x}$

d'où $J_1 = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1$

donc $J_1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1$ soit encore : $J_1 = 1 - 2 e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$.

b) $J_2 = \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$;

on intègre paries , on pose :

$u(x) = x^2 \rightarrow u'(x) = 2x$

$v'(x) = e^{-2x} \rightarrow v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

d'où $J_2 = [-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x}]_0^1 + \int_0^1 x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} + \int_0^1 x e^{-2x} dx$.

Pour l'intégrale $\int_0^1 x e^{-2x} dx$ on intègre par parties , on pose :

on pose $M(x) = x \rightarrow M'(x) = 1$ et $m'(x) = e^{-2x} \rightarrow m(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

donc $\int_0^1 x e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx$

$= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1$

donc $\int_0^1 x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}$

donc $J_2 = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}$

on a alors $J_2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} e^{-2} = \frac{1}{4} (1 - \frac{5}{e^2})$.

2°/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 1 + J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a : $1 + x e^{-x} + x^2 e^{-x^2} + \ldots + x^n e^{-nx} = \sum_{k=0}^{n} (xe^{-x})^k$:

Somme de (n+1) termes d'une suite géométrique de raison $q = x e^{-x}$

et de premier terme 1. Donc $\sum_{k=0}^{n} (xe^{-x})^k = \frac{1 - (x e^{-x})^{n+1}}{1 - x e^{-x}}$.

b) On intègre les deux membres de l'égalité précédente entre 0 et 1 , on obtient :

$$\int_0^1 (1 + x\,e^{-x} + x^2\,e^{-x^2} + \ldots + x^n\,e^{-nx})\,dx = \int_0^1 \frac{1 - x^{n+1}e^{-(n+1)}}{1 - x\,e^{-x}}\,dx \quad ; \text{d'ou} :$$

$$\int_0^1 1\,dx + \int_0^1 x\,e^{-x}\,dx + \ldots + \int_0^1 x^n\,e^{-nx}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1 - x\,e^{-x}}(1 - x^{n+1}\,e^{-(n+1)})\,dx$$

donc $u_n = \int_0^1 f(x)(1 - x^{n+1}\,e^{-(n+1)})\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,e^{-(n+1)}\,dx$

donc $u_n = I - \int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,e^{-(n+1)}\,dx$

d' ou $I - u_n = \int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,e^{-(n+1)}\,dx$.

c) D'après B°/-1°/ on a pour tout réel x :

$x\,e^{-x} \leq \frac{1}{e}$ donc pour tout $x \geq 0$ on a :

$0 \leq (x\,e^{-x})^{n+1} \leq \frac{1}{e^{n+1}}$ et on a d'après B°/-3°/ : $0 \leq 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$

d' ou pour tout $x \geq 0$ on a : $0 \leq f(x)\,x^{n+1}\,e^{-(n+1)x} \leq \frac{1}{e^n\,(e-1)}$.

d) On a donc : $0 \leq \int_0^1 f(x)\,x^{n+1}\,e^{-(n+1)x}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{e^n\,(e-1)}\,dx$

donc : $0 \leq I - u_n \leq \frac{1}{e^n\,(e-1)}$. On a alors $I - \frac{1}{e^n\,(e-1)} \leq u_n \leq I$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n\,(e-1)} = 0$; car $[\frac{1}{e^n\,(e-1)}]$ est une suite géométrique de raison

$q = \frac{1}{e} \in]0,1[$.

Conclusion : la suite (u_n) est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = I$.

D°/ Pour $t \geq 0$, on pose : $\begin{cases} g(t) = f(\,\text{Log}\,t\,) & \text{si } t > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

et $F(x) = \int_1^x g(t)\,dt$.

1°/ La fonction g est la composée de $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \text{Log}\,t$.

f est continue sur $]\,0,+\infty\,[$ et $t \mapsto \text{Log}\,t$ est aussi continue sur $]0,+\infty[$

donc g l'est aussi .De plus on a :

$\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(\text{Log}\,t\,) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0 = g(0)$

donc g est continue en o^+.

Conclusion : g est continue sur $[0, +\infty[$; d'ou F(x) est bien définie sur $[0,+\infty[$.

2°/ La fonction g est continue sur $[0,+\infty[$, soit G une primitive de g sur$[0,+\infty[$.

On a donc F(x) = G(x) – G(1) et par suite F est dérivable sur $[0, +\infty[$ car G l'est aussi puisque c'est une primitive de g et on a :

$F'(x)\ G'(x) = g(x) = f(\text{Log}\,x) = \dfrac{x}{x-\text{Log}x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

3°/ a) Soit k(x) = Log t – t + 1 . on étudie les variation de k et en déduire le signe de k(x) sur $]0, +\infty[$, on obtient Log t – t +1 < 0 pour tout t > 0. Donc 1 < t –Log t et par suite

$\dfrac{1}{t-\text{Log}\,t} < 1 \Rightarrow \dfrac{t}{t-\text{Log}\,t} < t$ car $t > 0$.

b) Pour $x \in]0,1[$ on a $F(x) = \displaystyle\int_x^1 F'(t)\,dt = \int_x^1 \frac{t}{t-\text{Log}\,t}\,dt$.

Or on a : $\dfrac{t}{t-\text{Log}\,t} < t \Rightarrow \displaystyle\int_x^1 \frac{t}{t-\text{Log}\,t}\,dt \leq \int_x^1 t\,dt = \frac{1-x^2}{2}$

alors : $F(1) - F(x) \leq \dfrac{1-x^2}{2}$

Donc $\dfrac{x^2-1}{2} \leq F(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1[$.

4°/ a) • $t \geq 1$ alors $\text{Log}\,t \geq 0$ car $t \mapsto \text{Log}\,t$ est croissante ; donc $(\text{Log}\,t)^2 \geq 0$ et donc $-(\text{Log}\,t)^2 \leq 0 \Rightarrow t^2 - (\text{Log}\,t)^2 \leq t^2 \Rightarrow (t-\text{Log}\,t)(t+\text{Log}\,t) \leq t^2$ et

par suite on a : $\dfrac{t+\text{Log}\,t}{t} \leq \dfrac{t}{t-\text{Log}\,t}$ (car t-Log t > 0 et t > 0).

Donc : $1 + \dfrac{\text{Log}\,t}{t} \leq \dfrac{t}{t-\text{Log}\,t}$.

• D'autre part on a : Log t ≥ 0 pour $t \geq 1$ et $\text{Log}\,t - t + 1 \leq 0$ pour tout > 0

donc :

$-\text{Log}\,t\,(\text{Log}\,t - t + 1) \geq 0$ donc

$-(\text{Log}\,t)^2 + t\,\text{Log}\,t - \text{Log}\,t + t \geq t$ alors :

$(t - \text{Log}\,t)(1 + \text{Log}\,t) \geq t$ d'ou $\dfrac{t}{t-\text{Log}\,t} \leq 1 + \text{Log}\,t$.

Conclusion : Pour tout $t \geq 1$ on a : $1 + \dfrac{\text{Log}\,t}{t} \leq \dfrac{t}{t-\text{Log}\,t} \leq 1 + \text{Log}\,t$.

D'ou pour $x > 1$ on a : $\int_1^x (1+\frac{\text{Log } t}{t})\,dt \leq \int_1^x \frac{t}{t - \text{Log } t}\,dt \leq \int_1^x (1+\text{Log } t)\,dt$

Et donc : $(x-1) + \left[\frac{1}{2}(\text{Log } t)^2\right]_1^x \leq F(x) \leq (x-1) + \left[t \text{Log } t - t\right]_1^x$.

Donc : $x - 1 + \frac{1}{2}(\text{Log } x)^2 \leq F(x) \leq x \text{Log } x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} [x - 1 + \frac{1}{2}(\text{Log} x)^2] = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison des limites on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

PROBLEME 2

$n \in IN^*$, $\begin{cases} f_n(x) = x\,(\text{Log} x)^n \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

A°/ 1°/ a) $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x(\text{Log} x)^n$.

On pose $x = t^n$ on a alors : si $x \to 0^+$ alors : $t \to 0^+$.

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = \lim\limits_{t\to0^+} t^n\,(\text{Log } t^n)^n = \lim\limits_{t\to0^+} (n\, t \,\text{Log} t)^n = 0$

Car $\lim\limits_{t\to0^+} t\text{Log } t = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$; d'où f_n est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to0^+} (\text{Log } x)^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

car $\lim\limits_{x\to0^+} \text{Log } x = -\infty$.

Dans les deux cas on a f n'est pas dérivable en 0 à droite.

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, f_n est dérivable et on a :

$f_n'(x) = (\text{Log } x)^n + n\,x\,(\text{Log } x)^{n-1}\,\frac{1}{x} = (\text{Log } x)^{n-1}\,[\text{Log } x + n]$

2°/ a) **cas où n impair :**

Pour $n = 1$ on a $f_1'(x) = \text{Log } x + 1$.

$f_1'(x) = 0 \iff \text{Log} x = -1 \iff x = e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x \text{ Log } x = +\infty$

<u>pour $n \geq 3$</u> on a $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (\text{Log } x)^{n-1} = 0$ ou $\text{Log } x + n = 0$

donc $x = 1$ ou $x = e^{-n}$

$f_n(e^{-n}) = e^{-n}(\text{Log } e^{-n})^n = e^{-n}(-n)^n = (-1)^n (\frac{n}{e})^n$

Si n impair donc n-1 est impair

donc $(\text{Log } x)^{n-1} > 0 \ \forall x > 0$

pour n impair on a $(-1)^n = -1$

donc $f_n(e^{-n}) = -(\frac{n}{e})^n$

et on a : $\text{Log } x + n > 0$ pour $x > e^{-n}$

<u>cas ou n pair :</u>

$f_n'(x) = 0$ pour $x = 1$ ou $x = e^{-n}$.

On a n pair donc $(n - 1)$ impair et $(\text{Log } x)^{n-1} > 0$ pour $x > 1$

et $(\text{Log } x)^{n-1} < 0$ pour $x < 1$ et on a : $f_n(e^{-n}) = (\frac{n}{e})^n$

b) Soit $M(x, y)$ un point fixe de ξ_n on a donc :

pour $x = 1$ on a $y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$

pour $x = e$ on a $y = e \Rightarrow B(e,e)$

les points O, A, B sont des points de ξ_n indépendantes de n, donc pour tout $n \in IN^*$, les courbes ξ_n passent par A, B et C

3°/a) $f_2(x) - f_1(x) = x \text{ Log } x [\text{Log } x - 1]$. $f_2(x) - f_1(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$

On a donc : * $f_2(x) - f_1(x) > 0$ si $x \in]0,1[\cup]e,+\infty[$

alors ξ_2 est au dessus de ξ_1

* $f_2(x) - f_1(x) < 0$ si $x \in]1, e[$

alors ξ_2 est au dessous de ξ_1

* $f_2(x) - f_1(x) = 0$ pour $x = 1$ ou $x = e$

alors $\xi_2 \cap \xi_1 = \{ A,B\}$.

b) $A = \int_1^e -x\text{Log}x [\text{Log } x - 1] \, dx \quad \times 4 \text{ cm}^2$

$= [\int_1^e x\text{Log}x \, dx - \int_1^e x(\text{Log}x)^2 \, dx] \times 4 \text{ cm}^2$

$\int_1^e x\text{Log}x\,dx$; on intègre par parties ; on pose :

$u(x) = \text{Log}x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \dfrac{x^2}{2}$

donc $\int_1^e x\text{Log}x\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\text{Log }x\right]_1^e - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^e = -\dfrac{e^2}{2} + \dfrac{1}{4}$

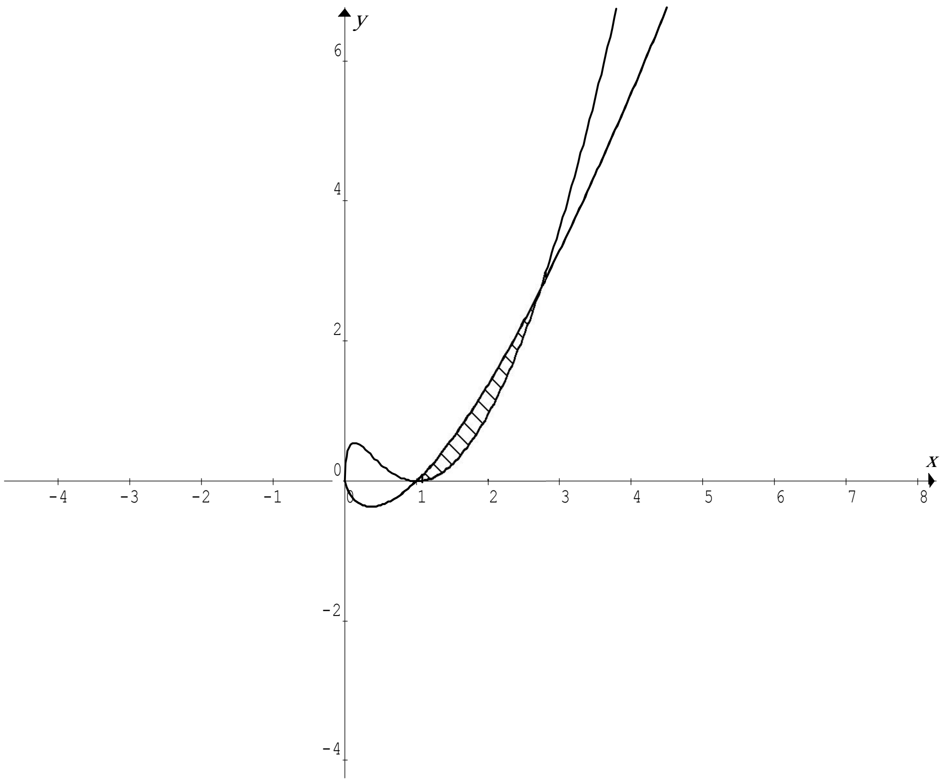
$\int_1^e x(\text{Log}x)^2\,dx$; on intègre par parties :

$u(x) = (\text{Log}x)^2 \Rightarrow u'(x) = 2\,\dfrac{1}{x}\text{Log }x.$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \dfrac{x^2}{2}.$

$\int_1^e x(\text{Log}x)^2\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2}(\text{Log }x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\text{Log}x\,dx$

donc $A = -\dfrac{e^2}{2} + 2\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{e^{-2}}{4}\right) \times 4\text{ cm}^2$ donc $A = 2\text{ cm}^2$.



B°) $F_n(x) = \int_\alpha^1 f_n(x)dx$ avec $n \in IN^*$ et $\alpha \in]0, 1[$

1°/a) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\int_0^1 f_n(x)dx$ existe et finie car f_n est

continue sur [0,1]

b) $F_n(\alpha) = \int_\alpha^1 f_n(x)dx = \int_\alpha^1 x\text{Log}x\, dx$

donc $F_1(\alpha) = \left[\frac{x^2}{2} \text{Log } x \right]_\alpha^1 - \frac{1}{4}\left[x^2 \right]_\alpha^1 = -\frac{\alpha^2}{2}\text{Log}\alpha - \frac{1}{4}(1-\alpha^2)$

$u_1 = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} F_1(\alpha) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha^2}{2}\text{Log}\alpha - \frac{1}{4}(1-\alpha^2) = -\frac{1}{4}$;

Car $\lim\limits_{x \to 0} x \text{ Log } x = 0$

2°/ $\alpha \in]0, 1[$ et $n \in IN^*$

a) $F_{n+1}(\alpha) = \int_\alpha^1 f_n(x)dx = \int_\alpha^1 x(\text{Log}x)^{x+1}dx$. On intègre par parties :

On pose : $u(x) = (\text{Log } x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = (n+1)\dfrac{(\text{Log}x)^n}{x}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$

Donc $F_{n+1}(\alpha) = \left[\frac{x^2}{2}(\text{Log } x)^{n+1}\right]_\alpha^1 - \frac{n+1}{2}\int_\alpha^1 x(\text{Log}x)^n dx$

$F_{n+1}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\text{Log } \alpha)^{n+1} - \frac{n+1}{2} F_n(\alpha)$

b) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} F_{n+1}(\alpha) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[-\frac{\alpha^2}{2}(\text{Log } \alpha)^{n+1} - \frac{n+1}{2} F_n(\alpha)\right]$

$u_{n+1} = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} F_{n+1}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} -\frac{\alpha^2}{2}(\text{Log } \alpha)^{n+1} - \frac{n+1}{2} u_n$

Or $\lim\limits_{x \to 0^+} \alpha^2(\text{Log}(\alpha))^{n+1} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\frac{n+1}{2}(x \text{ Log } x)\right]^{n+1} 0$; Avec $\alpha = x^{\frac{n+1}{2}}$

Donc $u_{n+1} = -\left(\frac{n+1}{2}\right)u_n$

3°/ a- $A_n = \int_0^1 \left|f_n(x)\right| dx \times 4 \text{ cm}^2$

on a : $I_n(x) = \int_x^1 f_n(x)dx$

donc $A_n = 4 \left| I_n \right|$ cm² , or $|u_{n+1}| = \frac{n+1}{2} \left| u_n \right|$ donc

$4|u_{n+1}| = 2(n+1)\ |I_n|$

par itération :

$$4\ |u_2| = 2(2)\ |u_1|$$
$$4\ |u_3| = 2\text{x}\ 3|u_2|$$
$$\vdots$$
$$4\ |u_n| = 2\ n|u_{n-1}|$$

---

le produit membre à membre donne :

$$4^{n-1}\ |u_n| = 2^{n-1}\ n\ !\ |u_1| \qquad \text{or } |u_1| = \frac{1}{4}$$

donc $2^{2n-2}\ |u_n| = 2^{n-1}\ n\ !\ \text{x}\ \frac{1}{4}$

donc $4\ |u_n| = \frac{n!2^{n-1}}{2^{2(n-1)}} = \frac{n!}{2^{n-1}}$ donc $A_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$

c) $n \geq 3$ Montrons que : $A_{n+1} \geq 2A_n$

$n \geq 3$ donc $n+1 \geq 4$ d'où $\frac{n+1}{2}\ u_n \geq \frac{4}{2}\ u_n$

donc $\frac{n+1}{2}\ |u_n| \geq 2\ |u_n|$

car $|u_{n+1}| \geq 2\ |u_n|$ donc $4|u_{n+1}| \geq 2.4|u_n|$ d'où $A_{n+1} \geq 2\ A_n$

Par itération on obtient pour $n \geq 3$ $A_4 \geq 2\ A_3$

$$A_5 \geq 2\ A_4$$
$$\vdots$$
$$A_n \geq 2A_{n-1}$$

On obtient après simplification: $A_n \geq 2^{n-3} A_3$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-3} A_3 = +\infty$ car (2^{n-3})suite géométrique de raison $q = 2 > 1$

et $A_3 > 0$ .Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$

C°/ $F(x) = \int_1^{e^x} t\text{Log}t\,dt$; $x \in$ IR.

1°) a) - la fonction $t \mapsto t \text{ Log } t$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc soit G une primitive de $t \mapsto t \text{ Log } t$, donc F(x) existe et est dérivable et on a : $F(x) = G(e^x) - G(1)$.

Donc $F'(x) = e^x \cdot G'(e^x) = e^x \cdot e^x \text{ Log } e^x = x\ e^{2x}$ pour tout $x \in$ IR

b) $F'(x) = xe^{2x}$

pour $x \geq 0$ on a $F'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0, +\infty[$

$x < 0$ on a $F'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty, 0]$

2°/ a) $F(x) = \int_1^{e^x} t \operatorname{Log} t \, dt$

on intègre par parties : $u(t) = \operatorname{Log} t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = t \Rightarrow v(t) = \frac{t^2}{2}$

donc $F(x) = [\frac{t^2}{2} \operatorname{Log} t]_1^{e^x} - \frac{1}{2} \int_1^{e^x} t \, dt$

$$= \frac{(e^x)^2}{2} x - \frac{1}{4}(e^x)^2 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{x}{2}(e^x)^2 - \frac{1}{4}(e^x)^2 + \frac{1}{4}$$

$$F(x) = \frac{(e^x)^2}{4}[2x-1] + \frac{1}{4} \quad ; \forall x \in IR$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{e^x}{2})^2 (2x - 1) + \frac{1}{4}$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} (x\, e^x)^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x)^2 = 0$

tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)$			0	+	
$F(x)$	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

PROBLEME 3

A°/ $f(x) = x.\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

1) $D_f = \{x \in IR^* \text{ tel que : } e^{\frac{2}{x}} - 1 \geq 0 \}$

On a : $e^{\frac{2}{x}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{x}} \geq 1 \Leftrightarrow \text{Log}(e^{\frac{2}{x}}) \geq \text{Log } 1$;Car $x \mapsto \text{Log } x$ est croissante. Donc $\frac{2}{x} \geq 0$ d'ou $x > 0$. Donc $D_f =]0, +\infty[$

2) $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$ pour $x \in [0, +\infty[$

a- la fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $g'(x) = -1 + 2e^{-2x}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{2}$ donc $-2x = \text{Log } \frac{1}{2}$ d'où $x = \frac{\text{Log}2}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 - x - e^{-2x}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

* $g(0) = 0$
* $g(\frac{\text{Log}2}{2}) = \frac{\text{Log}2}{2}\sqrt{e^{\text{Log}2} - 1} = \frac{\text{Log}2}{2}$

x	0		$\frac{\text{Log}2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\text{Log}2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

b) On a : g est une bijection de $[\frac{\text{Log}2}{2}, +\infty[$ sur $]-\infty, \frac{\text{Log}2}{2}]$ car g est continue et strictement décroissante sur $[\frac{\text{Log}2}{2}, +\infty[$ et on a : $O \in]-\infty, \frac{\text{Log}2}{2}]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in [\frac{\text{Log}2}{2}, +\infty[$ cela signifie que la courbe ξ_g coupe $(x'x)$ en un seul point d'abscisse α .

$$\begin{cases} g(\frac{\text{Log}2}{2}) = \frac{\text{Log}2}{2} > 0 \\ g(1) = 1 - 1 - e^{-2x} = -e^{-2} < 0 \end{cases}$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $\alpha \in]\frac{\text{Log}2}{2}, 1[$

c) d'après les variation de g on a :

$x \in [0, \alpha[$	$g(x) \geq 0$
$x \in]\alpha, +\infty[$	$g(x) < 0$
$x = \alpha$	$g(x) = 0$

3°) $\text{Log}(f(x)) = \text{Log}(x.\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}) = \text{Log}\, x + \frac{1}{2}\text{Log}(e^{\frac{2}{x}} - 1)$

$= \text{Log}\, x + \frac{1}{2}\text{Log}(e^{\frac{2}{x}}(1 - e^{-\frac{2}{x}}))$

$= \text{Log}\, x + \frac{1}{2}\text{Log}\, e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}\text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}})$

$= \text{Log}\, x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}})$

Donc $\text{Log}(f(x)) = \frac{1}{x}[1 + x\,\text{Log}\, x] + \frac{1}{2}\text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}})$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \text{Log}(f(x)) = \lim\limits_{x\to 0^+} [\frac{1}{x}(1 + x\,\text{Log}\, x) + \frac{1}{2}\text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}})]$

on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\text{Log}\, x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{2}{x}} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}}) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{Log}(f(x)) = +\infty$

or $f(x) = e^{\text{Log}(f(x))}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$

finalement $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

4°/a- $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}\sqrt{e^{2\alpha} - 1}$

or $g(\alpha) = 0 \iff 1 - \alpha - e^{-2\alpha} = 0$ c'est à dire $e^{-2\alpha} = 1 - \alpha$

d'où $e^{2\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

d'où $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{1-\alpha} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2}.\frac{1-(1-\alpha)}{1-\alpha}}$ car $\alpha > 0$.

donc $f(\frac{1}{\alpha}) = \sqrt{\frac{1}{\alpha - \alpha^2}}$

b- $f'(x) = \sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} + x\dfrac{\frac{-2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}}{2\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}} = \sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} + \dfrac{-\frac{1}{x}e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}} = \dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1-\frac{1}{x}e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}$

d'où $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{2}{x}}[1-\frac{1}{x}-e^{-\frac{2}{x}}]}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}} = \dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}g(\frac{1}{x})$ donc $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}g(\frac{1}{x})$;

pour tout $x > 0$.

c) on a $f'(x) = 0 \iff g(\frac{1}{x}) = 0$ car $\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}} \neq 0$

donc $\frac{1}{x} = \alpha$ d'où $x = \frac{1}{\alpha}$ et pour $x \in [\frac{\text{Log } 2}{2}, 1]$ on a g est décroissante

donc : si $x \geq \frac{1}{\alpha}$ on a $\frac{1}{x} \leq \alpha$ c'est à dire $g(\frac{1}{x}) \geq 0$

si $x \leq \frac{1}{\alpha}$ on a $\frac{1}{x} \geq \alpha$ donc $g(\frac{1}{x}) \leq 0$.

d) $f(x) - x = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} - x = x[\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} - 1]$

or $x > 0$ alors $\frac{2}{x} > 0$ et $e^{\frac{2}{x}} > 1$ donc $\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} > 0$

$f(x) - x = 0 \iff x = 0$ ou $e^{\frac{2}{x}} - 1 = 1$

$\iff x = 0$ ou $e^{\frac{2}{x}} = 2$ donc $x = \dfrac{2}{\text{Log } 2}$

car : on a $x \geq \dfrac{2}{\text{Log}2} \Longrightarrow \frac{2}{x} \leq \text{Log } 2 \Longrightarrow e^{\frac{2}{x}} - 2 \leq 0$

$\Longrightarrow e^{\frac{2}{x}} - 1 \leq 1 \Longrightarrow \sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} \leq 1$ et donc $f(x) - x \leq 0$

donc pour $x \in]0, \dfrac{2}{\text{Log}2}]$ on a ξ_f au-dessus de Δ

pour $x \in]\dfrac{2}{\text{Log}2}, +\infty[$ on a ξ_f au-dessous de Δ

B°/ $h :]\frac{1}{x}, +\infty[\rightarrow IR$

$x \mapsto f(x)$

1) on a h est décroissante, continue sur $]\frac{1}{\alpha}, +\infty[$ donc elle

réalise une bijection de $]\frac{1}{x}, +\infty[$ dans $h<]\frac{1}{\alpha}, +\infty[> =]-\infty, \sqrt{\frac{1}{\alpha-\alpha^2}}[$

2) a- h est dérivable sur $]\frac{1}{\alpha}, +\infty[$ et $h'(x) \neq 0$ pour tout

$x \in]\frac{1}{\alpha}, +\infty[$ donc h^{-1} est dérivable sur $]\sqrt{\frac{1}{\alpha-\alpha^2}}, +\infty[$

b- la courbe ξ' de h^{-1} est symétrique de ξ_h par rapport à $y = x$

3) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in IN \end{cases}$

a) Montrons que pour tout $n \in IN$ on a : $2/\text{Log}2 \leq u_n \leq 4$

* Pour $n = 0$ on a $u_0 = 4 \in [2/\text{Log}2, 4]$

Supposons qu'on a $\frac{2}{\text{Log}2} \leq u_n \leq 4$ pour un certain $n \in IN$ et

montrons qu'on a :

$$\frac{2}{\text{Log}2} \leq u_{n+1} \leq 4$$

On a sur $[\frac{2}{\text{Log}2}, 4]$; f est décroissante donc : $f(4) \leq f(u_n) \leq f(\frac{2}{\text{Log}2})$

Donc $4\sqrt{e^2-1} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{\text{Log}2}\sqrt{e^{\frac{4}{\text{Log}2}}-1}$ Or $4\sqrt{e^2-1} > \frac{2}{\text{Log}^2}$

et $\frac{2}{\text{Log}^2}\sqrt{e^{\frac{4}{\text{Log}2}}-1} < 4$. Donc $\frac{2}{\text{Log}2} \leq u_{n+1} \leq 4$

<u>Conclusion</u> : Pour tout $n \in IN$ on a $\frac{2}{\text{Log}^2} \leq u_n \leq 4$

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

on a $f(x) - x \leq 0$ pour $x \in [\frac{2}{\text{Log}2}, 4]$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ d'où (u_n) est

décroissante

<u>Conclusion</u> $\begin{cases} (u_n) \text{ décroissante} \\ (u_n) \text{ minorée par } \frac{2}{\text{Log}2} \end{cases}$

donc (u_n) convergente

soit ℓ sa limite on a donc $\ell = f(\ell)$

donc $\ell = \frac{\text{Log}2}{2}$ (car $f(\frac{\text{Log}2}{2}) = \frac{\text{Log}2}{2}$

C°/ $\varphi : P \to P$

$$M_{(z)} \mapsto M'_{(z')} \quad \text{tel que : } z' = \frac{\bar{z}}{\text{Log}|z|}$$

Avec $z \in \mathbb{C}^*\backslash\{|z| = 1\}$

1) M(x, y) et M'(X, Y)

On a $X + iY = \frac{x - iy}{\text{Log}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}\text{Log}(x^2+y^2} + i\frac{-y}{\frac{1}{2}\text{Log}(x^2+y^2)}$

Donc $\begin{cases} X = \frac{x}{\frac{1}{2}\text{Log}(x^2+y^2} \\ Y = \frac{-y}{\frac{1}{2}\text{Log}(x^2+y^2)} \end{cases}$

2) $x \neq 1$ et M distinct de A (1,0)

donc : $\begin{cases} X = \frac{1}{\frac{1}{2}\text{Log}(1+y^2)} & (1) \\ Y = \frac{-y}{\frac{1}{2}\text{Log}(1+y^2)} & (2) \end{cases}$

(1) ==> $\frac{1}{2}$ Log $(1+y^2) = \frac{1}{x}$

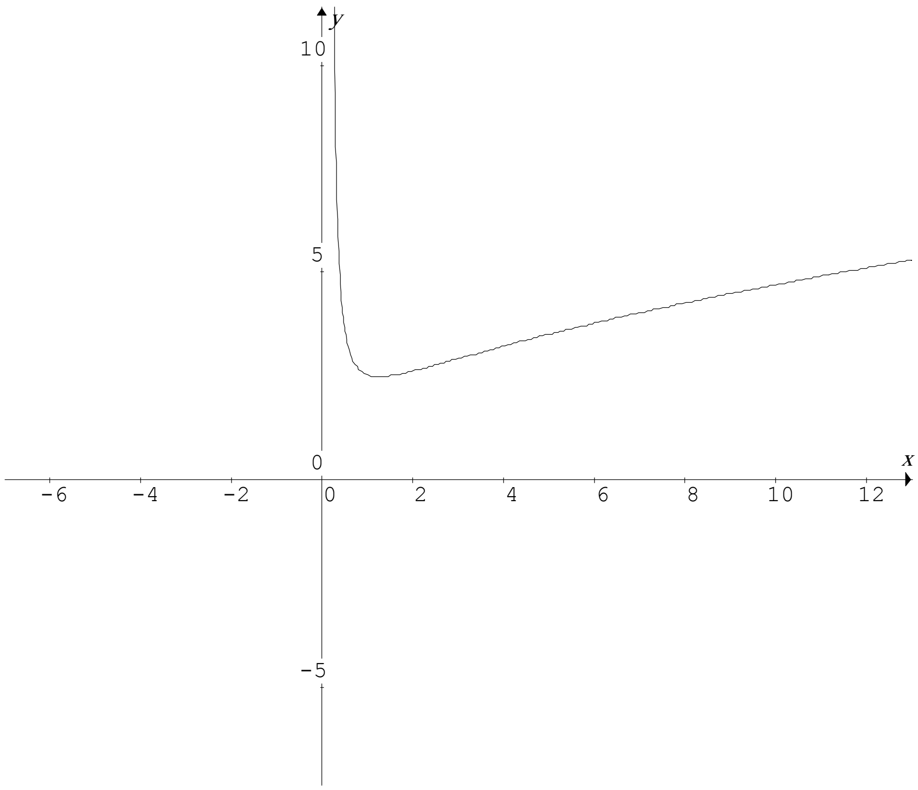
==> donc $\frac{2}{x} = \text{Log}(1+y^2)$ d'où $e^{2/x} = 1 + y^2$

donc $y^2 = e^{2/x}-1$ → $y = \mp\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

donc $Y = -\frac{\mp\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}{\frac{1}{x}} = \mp x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}$

donc $\begin{cases} Y = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} \\ \text{ou} \\ Y = -x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} \end{cases}$

Donc $E = \xi_f \cup \xi_1$ avec $\xi_1 = S_{(x'x)}(\xi_f)$.



PROBLEME 4

A°/

1°/ a) $f_1(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$; $\forall\ x \in \left]-1;+\infty\right[$

La fonction f_1 est dérivable sur $\left]-1;+\infty\right[$ (quotient de deux fonctions dérivables), et on a : $f_1'(x) = \dfrac{e^x(1+x) - e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,e^x}{(1+x)^2}$ .Soit donc le tableau de variations de f_1 :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f_1(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} \cdot \dfrac{x}{x+1} = +\infty$

- $f_2(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$; $\forall\, x \in \left]-1;+\infty\right[$

f_2 est dérivable sur $\left]-1;+\infty\right[$ et $f_2'(x) = \dfrac{e^x(1+x)^2 - 2(x+1)e^x}{(1+x)^4}$

d'où $f_2'(x) = \dfrac{e^x(1+x-2)}{(1+x)^3} = \dfrac{(x-1)\,e^x}{(1+x)^3}$

Soit donc le tableau de variation de f_2 :

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{e}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x \to (-1)+} f_2(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{(x+1)^2} = +\infty$ (voir Ex. Chapitre IV)

b) Position de ξ_1 et ξ_2 :

- $f_2(x) - f_1(x) = \dfrac{-xe^x}{(1+x)^2}$; $\forall\, x \in \left]-1;+\infty\right[$.

Donc

- $\forall\, x \in \left]-1;0\right[$ on a $f_2(x) - f_1(x) > 0$ $\Rightarrow \xi_2$ au-dessus de ξ_1.
- $\forall\, x \in \left]-1;+\infty\right[$ on a $f_2(x) - f_1(x) < 0$ $\Rightarrow \xi_2$ au-dessous de ξ_1.
- Pour x = 0 on a $f_2(x) = f_1(x)$ donc $\xi_1 \cap \xi_2 = \{(0,1)\}$.

Etudions les branches infinies à ξ_2 et ξ_1 :

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x\,(x+1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{x\,(x+1)} = +\infty$.

Donc la courbe ξ_1 admet une branche infinie parabolique de

direction $(\overrightarrow{oj})$ en $+\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x(x+1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x(x+1)^2} = +\infty$.

Donc la courbe de ξ_2 admet au voisinage de $+\infty$, une branche infinie

parabolique de direction $(\overrightarrow{oj})$.

* La droite d'équation x = -1 est une asymptote verticale à ξ_1 et ξ_2.

c) soit D la partie du plan limité par ξ_1 , ξ_2 et les droites d'équations

x = 0 et x = 1

On a : $A(D) = \left(\int_0^1 (f_1(x) - f_2(x)dx \right) x\, 4\, cm^2 = \left(\int_0^1 \frac{x\, e^x}{(1+x)^2} dx \right) x\, 4\, cm^2$

On intègre par parties ; on pose :

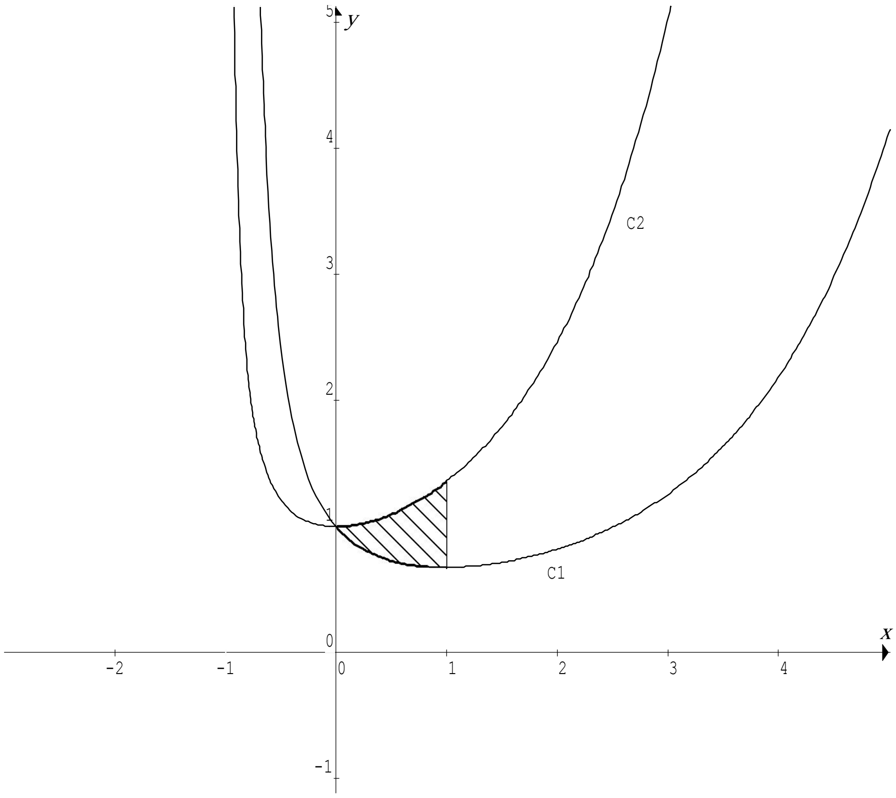
$U(x) = x\, e^x \quad \Rightarrow \quad U'(x) = e^x(x+1)$

$V'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{-1}{x+1}$.

On a donc :

$$A(D) = \left(\left[\frac{-xe^x}{1+x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^x dx \right) x\, 4\, cm^2 = \left(\frac{-e}{2} + e - 1 \right) 4cm^2 = \left(\frac{e}{2} - 1 \right) 4cm^2$$

d'où $A(D) = (2e - 4)\, cm^2$.



2°/ U_n est la valeur minimal de f_n sur $]-1;+\infty[$.

a) La fonction f_n est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $f_n'(x) = \dfrac{e^x(x+1-n)}{(1+x)^{n+1}}$.

On a donc :

x	-1		n-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{e^{n-1}}{(n)^n}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f_n admet au point $(n-1)$ un minimum absolu égal à $f_n(n-1)$; donc $U_n = f_n(n-1)$.

b) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{e^x\left[1-(x+1)\right]}{(x+1)^{n+1}} = \dfrac{-x\,e^x}{(x+1)^{n+1}} \leq 0$; $\forall\, x \geq 0$ on a $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

Pour x = n on a $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Log} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Log}\left(\dfrac{e^{n-1}}{n^n}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\operatorname{Log} e^{n-1} - \operatorname{Log} n^n\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (n - 1 - n \operatorname{Log} n) = -\infty$

On pose $N = \operatorname{Log} U_n \Rightarrow U_n = e^N$

Si n tend vers $+\infty$ alors N tend vers $-\infty$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{N\to+\infty} e^N = 0$

B°) Pour $x \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$; on a $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{Log}x} f_2(t)dt$

1°/La fonction f_2 est continue sur $]-1,+\infty[$ et par suite elle est continue sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ donc F est bien définie sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

2°/ $\forall\, x \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ on a : $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{Log}x} \frac{e^t}{1+t^2}dt$

on a donc $0 \leq t \leq \operatorname{Log} x \Rightarrow 1 \leq e^t \leq x (e^{\operatorname{Log}x} = x)$

$\Rightarrow \dfrac{e^t}{(1+t)^2} \leq \dfrac{x}{(1+t)^2} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\operatorname{Log}x} \frac{e^t}{1+t^2}dt \leq \int_0^{\operatorname{Log}x} \frac{x}{(1+t)^2}dt$

$\Rightarrow F(x) \leq x \left[\dfrac{-1}{1+t}\right]_0^{\operatorname{Log}x}$ °/ $\forall\, x \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

On a $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} x\left(1 - \dfrac{1}{1+\operatorname{Log}x}\right) = -\infty$ Car $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} \dfrac{1}{1+\operatorname{Log}x} = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison de limites on a :

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x) = -\infty$$

3°/ a) Pour $x > \frac{1}{e}$ on a : $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{Log}x} \frac{x}{(1+t)^2}dt$

On intègre par parties :On pose $U(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow U'(t) = \dfrac{-2}{(1+t)^3}$

$V'(t) = e^t \Rightarrow V(t) = e^t$

On a donc $F(x) = \left[\dfrac{e^t}{(1+t)^2} \right]_0^{Logx} + 2\displaystyle\int_0^{Logx} \dfrac{e^t}{(1+t)^3} dt$

Donc $F(x) = \dfrac{e^{Logx}}{(1+Logx)^2} - 1 + 2\displaystyle\int_0^{Logx} f_3(t)dt$

$$F(x) = \frac{x}{(1+Logx)^2} - 1 + 2\int_0^{Logx} f_3(t)dt\,.$$

Comme $f_3(t) \geq 0$; $\forall\, t \in \left]-1,+\infty\right[$ alors on a : $\displaystyle\int_0^{Logx} f_3(t)dt \geq 0$

$$\frac{x}{(1+Logx)^2} - 1 + 2\int_0^{Logx} f_3(t)dt \;\geq\; \frac{x}{(1+Logx)^2} - 1$$

Donc $F(x) \geq \dfrac{x}{(1+Logx)^2} - 1$.

Et on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(1+Logx)^2} - 1 = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{1+Logx}\right)^2 - 1$

On pose $X = \sqrt{x}$ ou si x tend vers $+\infty$ alors X d'est aussi

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(1+Logx)^2} - 1 = \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{X}{1+LogX}\right)^2 - 1 = \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{X} + 2\frac{LogX}{X}}\right)^2 - 1 = +\infty$$

donc d'après le théorème de comparaison de limites on a :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

4°/ La fonction f_2 est continue sur $\left]-1,+\infty\right[$ donc elle possède une primitive G et on a donc : F(x) = G(Log x) – G(0)

G est dérivable sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ et $x \mapsto Logx$ l'est aussi donc F est dérivable sur $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ (composée des fonctions dérivables) et on a :

$$F'(x) = \frac{e^{Logx}}{(1+Logx)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

D'où F'(x) = $\frac{1}{(1+\text{Log})^2} > 0$ donc F est strictement croissante

sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Soit donc le tableau de variation de F :

x	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
F'(x)	+	
F(x)	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Ainsi la fonction F est une bijection de $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ dans IR.

C°) $\forall$ x $\geq$ 1 on a : $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$

1°/ $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(f_{n+1}(t) - f_n(t)\right)dt$

or $\forall$ x $\in [0,1]$ et n $\geq$ 0 on a : $f_{n+1}(t) - f_n(t) \leq 0$

donc $\int_0^1 \left(f_{n+1}(t) - f_n(t)\right)dt \leq 0$ donc $I_{n+1} \leq I_n$

d'où la suite (I_n) est décroissante.

On a : $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\forall$ t $\in [0,1]$ on a $f_n(t) \geq 0$

$\Rightarrow$ $I_n \geq 0$ donc (I_n) est minorée par 0

donc (I_n)minorée par 0 est décroissante d'où elle est convergente.

2°/ a) $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^n}dt$

on a donc : 0 $\leq$ t $\leq$ 1 $\Rightarrow$ t $\leq$ e^t $\leq$ e

$\Rightarrow$ $\frac{1}{(1+t)^n} \leq \frac{e^t}{(1+t)^n} \leq \frac{e}{(1+t)^n}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{e}{(1+t)^n}dt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{(1+t)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-n} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[e.\frac{1}{(1+t)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-n} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right) \leq I_n \leq \frac{e}{1-n}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-n}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ (Suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$)

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 0$.

D'où d'après le théorème de comparaison de limites on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

3°/a) $f'_n(X) = \frac{e^x(x-n+1)}{(x+1)^{n+1}} = \frac{e^x(x+1-n)}{(x+1)^{n+1}}$

$$= \frac{e^x}{(x+1)^n} + -n\frac{e^x}{(x+1)^{n+1}}$$

donc : $f'_n(x) = f_n(x) - n \ f_{n+1}(x)$

b) On a donc $\int_0^1 f'_n(x)dx = \int_0^1 f_n(x)dx - n \int_0^1 f_{n+1}(x)dx$

$$\Rightarrow I_n - n I_{n+1} = \frac{e}{2^n} - 1$$

d'où : $n \ I_{n+1} = I_n - \frac{e}{2^n} + 1$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{2^n} = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} n \ I_{n+1} = 1$.