Lycée de Sbeïtla | **A – S** : 2014 - 2015

Mathématiques

$4^{ème}$ Maths

SÉRIE D'EXERCICES

Thèmes : Fonction logarithme
Fonction exponentielle

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01 (Bac 2014 – Session principale)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\ln(1+\tan x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} =+\infty$

b) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Vérifier que les points O , $A\left(\frac{\pi}{4};\ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8};\frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de (C)

(On donne $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$)

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

(On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$)

c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C)

3) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ en précisant la tangente au point O

4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C) la droite (OA) et les droites d'équations $x=\frac{\pi}{8}$ et $x=\frac{\pi}{4}$

a) Justifier que les surfaces S_1 et S_2 ont le même aire

b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,dx$

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera .On note f^{-1} la réciproque de f

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x\in J$

c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+(e^x-1)^2}\,dx$

Exercice 02

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^x}$ .On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.Interpréter graphiquement les résultats

2) a) Montrer que pour tout réel $x, f'(x) = -\frac{(2+e^{-x})}{(1+e^{x})^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O

b) Etudier la position relative de (C) et (T)

4) Soit α un réel strictement positif .On désigne par A_α l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), les axes du repère et la droite d'équation $x=\alpha$

a) Vérifier que, pour tout réel $x, f(x) = e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

b) Montrer que $A_\alpha = -e^{-\alpha} + \ln(1+e^{-\alpha}) + 1 - \ln 2$

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A_\alpha$

Exercice 03

Parie A

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(e^{x}+e^{-x})$ .On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 3 cm)

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que pour tout réel x de $[0;+\infty[$, on a : $f(x) = x + \ln(1+e^{-2x})$

En déduire que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à (C)

c) Etudier la position relative de (C) et Δ

2) Dresser le tableau de variation de f

3) Tracer Δ et (C)

Partie B

Pour tout réel x de $[0;+\infty[$, on pose : $F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})dt$

1) Soit n un entier naturel .Donner une interprétation géométrique de $F(n)$

2) Etudier le sens de variation de F sur $[0;+\infty[$

3) Démontrer que pour tout réel $t>0$ on a : $\frac{t}{t+1} \le \ln(1+t) \le t$

4) En déduire que $\forall x>0, \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln(1+e^{-2x})}{2} \le F(x) \le \frac{1-e^{-2x}}{2}$

5) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe et est un nombre réel noté l .Etablir que : $\frac{\ln 2}{2} \le l \le \frac{1}{2}$

6) Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})dt$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, \ln(1+e^{-2(n+1)}) \le u_n \le \ln(1+e^{-2n})$

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

7) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

a) Exprimer S_n à l'aide de F et n

b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite

Exercice 04

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ .On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 3 cm)

1) a) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0)=0$

   b) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0,\ f'x)=\frac{(1-3x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^5}$

   c) Dresser le tableau de variation de f et construire (C)

2) Soit α un réel tel que $\alpha>1$

   a) l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par (C) et les droite d'équations respectives $y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$

   b) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

3) Soit F la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x t^2 f(t)\,dt$

   a) Montrer que F est dérivable sur $[1;+\infty[$ et calculer $F'(x)$,pour tout $x\geq 1$

   b) Montrer que Pour tout $x\geq 1$, $\frac{\ln x}{e}\leq F(x)\leq e^{-\frac{1}{x}}\ln x$

   c) Dresser alors le tableau de variation de F puis l'allure de la courbe représentative de F On précisera la demi tangente en $A(1;F(1))$