Exercice 01

Soit f la fonction définie sur $[-1;0]$ par : $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-\sqrt{1+x}}$

1) Montrer que f réalise une bijection de $[-1;0]$ sur $\left[\sqrt{2};2\right]$

2) Soit g la bijection réciproque de f , montrer que $\forall x\in\left[\sqrt{2};2\right], g(x)=-\frac{1}{4}\left(x^2-2\right)^2$

3) Soit F une primitive de f sur $[-1;0]$.Montrer que la fonction $H=F\circ g$ est une primitive sur $\left[\sqrt{2};2\right]$ de la fonction $h:x\mapsto x\,g'(x)$

4) Soit l'intégrale $I=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$

a) Montrer que $I=\int_{2}^{\sqrt{2}}x\,g'(x)\,dx$ .En déduire que $I=2-\int_{2}^{\sqrt{2}}g(x)\,dx$

b) Calculer la valeur de I

Exercice 02

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2}{6}\sqrt{2x+5}$ .On désigne par (C) sa courbe représentative

1) a) Etudier les variations de f

b) Montrer que la droite $\Delta: y=x$ coupe (C) en deux points dont on précisera les abscisses

2) a) Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ .Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$

b) Tracer la courbe (C) et la courbe (C') de g^{-1}

3) a) Calculer à l'aide d'une intégration par partie l'intégrale $I=\int_{0}^{2}x^2\sqrt{2x+5}\,dx$

b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C')

Exercice 03

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Soit (C) la courbe d'équation $y=\sqrt{x(2-x)}$.

Prouver que (C) est un demi-cercle puis la tracer

2) Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=\int_{0}^{x}\sqrt{t(2-t)}\,dt$ et soit Γ sa courbe représentative

a) Interpréter graphiquement le réel $f(x)$. En déduire les valeurs de $f(1)$ et de $f(2)$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que la courbe Γ admet un point d'inflexion I que l'on précisera

d) Montrer que I est un centre de symétrie de Γ .Tracer la courbe Γ

3) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=\int_{0}^{1+\sin x}\sqrt{t(2-t)}\,dt$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $g'(x)$

b) En déduire que pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{\pi}{4}$

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$

Vérifier que $A = \int_0^2 f(x)dx$.

On admet que $\int_0^2 f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x . f(1+\sin x)dx$ Déterminer la valeur de A

Exercice 04

Soit n un entier naturel non nul. On pose $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$

1) Vérifier que $I_1 = \frac{2}{3}$ et que $I_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$

2) Vérifier que $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx$

3) a) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$

b) Montrer alors, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}$

4) Soient F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^{\sin x} (1-t^2)^n dt$ et $G(x) = \int_0^x \cos^{2n+1} t\, dt$

a) Montrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer $F'(x)$ et $G'(x)$

b) En déduire que pour tout réel x , $F(x) = G(x)$

c) En déduire, en fonction de n, alors la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\, dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$