Exercice 01

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^4 |x-2|\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$; $\int_{-1}^1 \frac{x^{2015}}{x^{14}+1}dx$

$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$; $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$; $\int_0^1 (2x+1)\sin \pi(x^2+x+1)\,dx$

Exercice 02

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^4 x$

1) Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$
2) Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$
3) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)\,dx$

Exercice 03

1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$ telle que sa fonction dérivée f' est continue sur $[a;b]$

Montrer que : $\int_a^b xf'(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = bf(b)-af(a)$

2) Calculer $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$ et en déduire $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

Exercice 04

Soit f la fonction définie sur $[-2;2]$ par $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$

1) Etudier la fonction f et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
2) Soit g la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $g(x)=\int_0^{2\cos x}\sqrt{4-t^2}\,dt$
   a) Montrer que g est dérivable sur $[0;\pi]$ et que $g'(x)=-4\sin^2 x$
   b) Déterminer $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de x
3) Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$

Exercice 05

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=\sqrt{x(2-x)}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que la droite $\Delta : x=1$ est un axe de symétrie à $\mathscr{C}$
   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis construire $\mathscr{C}$
2) Soit F la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x)=\int_0^{1+\sin x} f(t)\,dt$
   a) Justifier l'existence de $F(x)$

b) Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $F'(x)$

c) En déduire alors l'expression de $F(x)$

d) Déterminer l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses

3) Calculer le volume engendré par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe $(O;\vec{i})$

4) Le tableau ci- contre est le tableau de variations de la fonction g définie sur $[0;2]$ par $g(x)=x\sqrt{x(2-x)}$

On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de g dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Etudier la position de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$

b) Construire $\mathscr{C}'$

c) Calculer l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

Exercice 06

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$

c) Tracer Δ et $\mathscr{C}$

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_0^{\sqrt{\sin x}} f(t)\,dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$

b) En déduire que $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $F(x)=\frac{x}{2}$

c) Trouver alors l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ de f et les droites d'équations $x=0$ et $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Pour tout réel α de $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$, on pose $I(\alpha)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\sin\alpha}}\dfrac{\sqrt{1-t^4}}{t^3}\,dt$

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\lim\limits_{\alpha\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} I(\alpha)$

Exercice 07

Soit g la fonction définie sur $[0;1[$ par $g(t)=\dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$

1) Montrer que g réalise une bijection de $[0;1[$ sur un intervalle J que l'on précisera

2) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g(t)\,dt=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt$

3) Soit G la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $G(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $G'(x)$

b) En déduire que $G(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)$, pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

c) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}dt$ et $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}g(t)dt$

Exercice 08

Dans la figure ci-contre le solide (S) est obtenu en faisant tourner la courbe de la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+\cos x}}$ autour de l'axe des abscisses

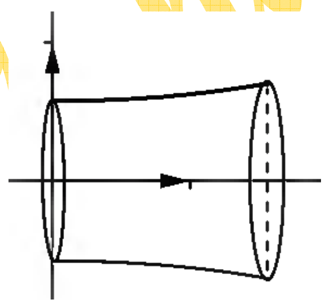
On note V le volume de (S) en unité de volume

1) Pour tout x de $]-\pi;\pi[$, on pose $F(x)=\int_0^x\frac{dt}{2+\cos t}$ et $G(x)=\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{2}{3+t^2}dt$

a) Montrer que $V=\pi.F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) Montrer que G est dérivable sur $]-\pi;\pi[$ et calculer $G'(x)$

c) En déduire que pour tout de x de $]-\pi;\pi[, F(x)=G(x)$



2) Soit $H(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$; $x\in\mathbb{R}$

a) Montrer que pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $H(\tan x)=x$

b) Montrer que pour tout x de $]-\pi;\pi[, G(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

c) En déduire la valeur de V

Exercice 09

Soit F la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_0^{1+\tan x}\frac{dt}{t^2-2t+2}$

1) a) Calculer $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

b) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

c) En déduire l'expression de $F(x)$, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

d) En déduire la valeur de $\int_0^2\frac{dt}{t^2-2t+2}$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=\frac{t}{1+(t-1)^2}$

a) Montrer que g admet une unique primitive G sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0

b) Vérifier que pour tout réel t, $\frac{2-t}{1+(t-1)^2}=g(2-t)$

c) En déduire que $\int_0^2\frac{2-t}{1+(t-1)^2}dt=G(2)$ et que $\int_0^2\frac{t}{1+(t-1)^2}dt=\frac{\pi}{2}$