Lycée de Sbeïtla | A – S : 2016 - 2017

Mathématiques
$4^{ème}$ Maths

SÉRIE D'EXERCICES
Thème : Coniques

Professeur :
Elabidi Zahi

Exercice 01

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Soit $\mathscr{P}_0$ la parabole d'équation : $y^2 = 4x - 4$
   a) Déterminer le foyer et la directrice de $\mathscr{P}_0$ puis la tracer
   b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la parabole $\mathscr{P}_0$ et la droite d'équation $x = 3$
2) Soit $F(a,b)$ un point du plan tel que $a > 0$ et soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer F et de directrice la droite des ordonnées
   a) Prouver qu'une équation de $\mathscr{P}$ est $(y-b)^2 = 2ax - a^2$
   b) Montrer que $\mathscr{P}$ passe par le point $A(1,0)$ si et seulement si F appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1 privé de O
   c) Soit S le sommet de la parabole $\mathscr{P}$
   Déterminer et construire l'ensemble des points S lorsque F décrit $\mathscr{C}$ privé de O
   d) Soient F_1 et F_2 deux point du cercle $\mathscr{C}$ privé de O et $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les paraboles correspondantes. Montrer que les tangentes en A aux paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires, si et seulement si, F_1 et F_2 sont diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$

Exercice 02

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer O et de directrice la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $x = -2$

1) a) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $y^2 = 4x + 4$
   b) Tracer la parabole $\mathscr{P}$, on désignera par S son sommet
2) Soit le point $A\left(-2;\frac{3}{2}\right)$
   a) Déterminer, par leurs équations, les tangentes à $\mathscr{P}$ issues de A
   On notera T_1 et T_2 ces tangentes, M_1 et M_2 leurs points de contact respectifs avec $\mathscr{P}$
   b) Tracer T_1 et T_2.
   Montrer quelles sont perpendiculaires et que les points O, M_1 et M_2 sont alignés
3) Soit M un point de $\mathscr{P}$ d'affixe $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$
   a) Prouver que : $\theta \not\equiv 0[2\pi]$
   b) Montrer que : $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$
4) Soit M un point de $\mathscr{P}$ distinct de S, la droite (OM) recoupe $\mathscr{P}$ en M'
   a) Déterminer la valeur minimale de la distance MM'
   b) Soient N et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur l'axe de $\mathscr{P}$
   Montrer que la valeur du produit $MN.M'N'$ est une constante que l'on précisera

Exercice 03

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_m): z^2 - 2mz - 2(1+i) = 0$, où m est un nombre complexe

On désigne par M le point d'affixe m et par M_1 et M_2 les points images des solutions z_1 et z_2 de (E_m)

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M d'affixe m pour lesquels le triangle OM_1M_2 est rectangle en O

1) Résoudre l'équation (E_m) pour $m = i\sqrt{2}$. Est-ce que le point $M\left(i\sqrt{2}\right)$ appartient à $\mathcal{H}$?

2) Soit Δ' le discriminant réduit de (E_m)

   a) Montrer que $M(m) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |m|^2 = |\Delta'|$

   b) En déduire qu'une équation de $\mathcal{H}$ est $x^2 - y^2 + 2xy + 2 = 0$

3) Soit S la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{8}$

   a) Soient $M(m)$ et $M'(m') = S(M)$ .Exprimer m^2 à l'aide de m'^2

   b) En déduire qu'une équation de la courbe $\mathcal{H}' = S(\mathcal{H})$ est $X^2 - Y^2 + 1 = 0$

   c) Donner la nature est les éléments caractéristiques de la courbe $\mathcal{H}'$

   d) Prouver que la courbe $\mathcal{H}$ est une hyperbole équilatère. Tracer $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$

Exercices 04

Le plan est muni un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit m un réel positif et Γ_m l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$mx^2 + (m+1)y^2 - 2x = 0$

1) Montrer que Γ_0 est une parabole dont on précisera les cordonnées de son foyer et une équation de sa directrice

2) Dans la suite on suppose que $m > 0$

   a) Montrer que Γ_m est une ellipse dont on précisera les coordonnées de l'un de ses foyers et une équation de sa directrice associée

   b) Donner une équation de la tangente à Γ_m au point O

3) Soit M un point de $\Gamma_m \setminus \{O\}$ d'affixe z tel que $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

   Montrer que $OM = \dfrac{2\cos\theta}{m + \sin^2\theta}$

Exercice 05

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$ et soit ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Dresser le tableau de variation de f puis construire ζ

2) a) Soit $\Gamma = \zeta_f \cup \zeta_{-f}$ .Montrer que Γ a pour équation $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

   b) Montrer que Γ est une ellipse dont on précisera le centre I, les sommets et les foyers

3) Soit F la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $F(x) = \int_0^{1+\cos x} f(t)\,dt$

   a) Montrer que F est dérivable sur $[0;\pi]$ et que $\forall x \in [0;\pi]$, $F'(x) = -2\sin^2 x$

   b) En déduire l'expression de $F(x)$.

   c) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par Γ