Mathématiques

$4^{ème}$ Maths

SÉRIE D'EXERCICES

Thèmes : Fonction logarithme népérien

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01

1) Soit h la fonction définie sur $[1:+\infty[$ par $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x\ln x} & \text{si } x>1\\ 1 \text{ si } x=1\end{cases}$

a) Montrer que h est continue à droite en 1

b) Montrer que pour tout x de $]1;+\infty[$, $\ln x < x-1$

c) Dresser alors le tableau de variation de h

d) En déduire que pour tout x de $[1:+\infty[$, $0<h(x)\leq 1$

2) Soit g la fonction définie sur $[1:+\infty[$ par $g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t}\ln t} & \text{si } x>1\\ \ln 2 & \text{si } x=1\end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Vérifier que $\forall\ x>1, \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}=\ln 2$

b) Vérifier que $\forall\ x>1,\ g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$

c) Montrer que $\forall\ x>1,\ g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$

3) a) Montrer que $\forall\ x>1,\ (x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$

b) en déduire que g est dérivable à droite en 1

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$

4) a) Montrer que g est dérivable que sur $]1;+\infty[$ et que $\forall x>1\ ,g'(x)=\dfrac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$

b) En déduire que $\forall x>1\ , 0<g'(x)\leq\dfrac{1}{2}$ .Dresser alors le tableau de variation de g

c) Tracer $\mathscr{C}$

5) a) Montrer que la fonction $k: x\mapsto g(x)-x+1$ réalise une bijection de $[1:+\infty[$ sur $]-\infty;\ln 2]$

b) En déduire qu'il existe un unique réel α de $]1;+\infty[$ tel que $1+g(\alpha)=\alpha$

6) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}u_0\in[1;\alpha[\\ u_{n+1}=1+g(u_n)\ ,\ \forall n\mathbb{N}\end{cases}$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 1\leq u_n<\alpha$

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante

c) En déduire que (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

d) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

f) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 02

1) Soit f la fonction définie sur $[0 : +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} & \text{si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

c) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{-x\ln x(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)\sqrt{1+(x\ln x)^2}}$

d) Dresser le tableau de variation de f

2) Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Déterminer une primitive sur $[e;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$

b) Montrer que $\forall t \geq e$, $t\ln t \leq \sqrt{1+(t\ln t)^2} \leq \sqrt{2}\ t\ln t$

c) Montrer que $\forall x \geq e$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) \leq \int_e^x \dfrac{dt}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}} \leq \ln(\ln x)$

d) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0$

e) Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexion que les on déterminera

f) Tracer $\mathscr{C}$ (on prendra $F(1) \approx 0,5$ et $F\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,4$)

3) Pour tout x de $[0;+\infty[$, on pose $\varphi(x) = x - F(x)$

a) Etudier la variation de φ

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ l'équation $\varphi(x) = n$ admet une unique solution α_n dans $[0;+\infty[$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,$\alpha_n > n$ .En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

4) a) Montrer que $\forall n \geq 1$,$0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \dfrac{F(n)}{n} + f(n)$

$\forall n \geq 1$,$0 < \dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \dfrac{F(n)}{n} + f(n)$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$

Exercice 03

Partie A (Questions préliminaires)

1) Montrer que l'équation : $x^3 + 2x - 1 = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une solution unique x_0

et que $x_0 \in \,]0;1[$

2) Montrer que : $\forall x \in \,]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} & , \text{ si } x\neq 0\\ 0 & , \text{ si } x=0\end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

Partie B

Soit F la fonction définie sur par $F(x)=\int_x^{x^2} f(t)dt$

1) a) Montrer que F est paire

b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

Déterminer le signe de $F(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$

2) a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\ln\left(1+x^4\right)-\ln\left(1+x^2\right)}{x} & , \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$

b) Montrer que F' est continue sur $\mathbb{R}$

3) a) Montrer que l'équation $F'(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in\,]0;1[$

b) Montrer que F est décroissante sur $[0;\alpha]$ et que F est croissante sur $[\alpha;+\infty[$

4) a) Montrer que ; $\forall x\in\,]0;+\infty[$,on a : $F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right)=3\left(\ln x\right)^2$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

5) a) Soit $x\in\mathbb{R}^*$, calculer $\int_x^{x^2}\dfrac{\ln(t^2)}{t}dt$ .En déduire que $F(x)-3\left(\ln x\right)^2=\int_x^{x^2}\dfrac{\ln(1+t^{-2})}{t}dt$

b) Montrer que $\forall x\in\,]1;+\infty[,\ 3\left(\ln x\right)^2\leq F(x)\leq 3\left(\ln x\right)^2+\dfrac{1}{2x^2}$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$

6) Soit Γ la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Donner une allure de Γ. (On donne $\alpha\approx 0,7$, $F(\alpha)\approx -0,1$ et $F(2)\approx 1,5$)