SÉRIE D'EXERCICES

Thème : Fonction logarithme népérien

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01

1) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$

a) Etudier les variations de h

b) Calculer $h(1)$ puis en déduire le signe de h

2) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\ln x$

a) Montrer que $\forall x\in\,]0;+\infty[,\ f'(x)=h(x)$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Tracer la courbe représentative ζ de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Soit g la restriction de f sur $[1;+\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Tracer dans le même repère la courbe représentative ζ' de la fonction g^{-1} réciproque de g

4) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe ζ l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$

5) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_1^2 (x-1)^n \ln x\,dx$

a) Montrer que I_n est décroissante et qu'elle est convergente

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\le I_n\le\frac{\ln 2}{n+1}$ En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 02

Soit F la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_1^{1+\tan x}\frac{dt}{t^2-2t+2}$

1) a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x)=1$

b) En déduire que $\forall\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$,$F(x)=x$ et que $\int_1^2\frac{dt}{t^2-2t+2}=\frac{\pi}{4}$

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^2 \ln(t^2-2t+2)=2\ln 2-2\int_1^2\frac{t^2-t}{t^2-2t+2}dt$$

b) Vérifier que pour tout réel t , $\frac{t^2-t}{t^2-2t+2}=1+\frac{t-1}{t^2-2t+2}-\frac{1}{t^2-2t+2}$

c) En déduire alors la valeur de l'intégrale : $I=\int_1^2\ln(t^2-2t+2)dt$

Exercice 03

A - Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{x+1} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0
2) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x+1+\ln x$
a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et que $0,27<\alpha<0,28$
b) Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x
3) a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f
4) Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan
a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse 1
b) Montrer que $\forall x>0, f''(x)=\dfrac{1-x^2-2x\ln x}{x(x+1)^3}$
c) Montrer que le point $I(1;0)$ est un point d'inflexion de C
d) Tracer T et C en précisant les branches infinies de C

B – Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=\int_1^{2x} f(t)\,dt$
1) a) Justifier l'existence de $F(x)$ pour $x\geq 0$
b) Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $F'(x)=2f(2x)$
2) Soit $x>1$
a) Montrer que $\forall t\in[1;x]$, on a : $\dfrac{1}{2}\ln t\leq f(t)\leq t\ln t$
b) Calculer les intégrales $I(x)=\int_1^{2x}\ln t\,dt$ et $J(x)=\int_1^{2x} t\ln t\,dt$
c) En déduire que $2x\ln(2x)-x+\dfrac{1}{2}\leq F(x)\leq 2x^2\ln(2x)-x^2+\dfrac{1}{4}$
Préciser $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$
3) On admet que $F(0)\approx 0,2$. Dresser le tableau de variation de F et construire l'allure de sa courbe dans un repère orthonormé

Exercice 04

A – Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
1) Montrer que f est une fonction impaire
2) a) Montrer que f est dérivable sur $]-1;1[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f
3) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse 0
b) Etudier la position de C par rapport à T
c) Tracer T et C

B – Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{1\times 2^1} + \frac{1}{3\times 2^3} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)\times 2^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$$

1) Soit n un entier naturel non nul

a) Montrer que $\forall t \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, on a : $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \ldots + t^{2n} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}$

b) En déduire que $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = u_n + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\, dt$

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, on a : $0 \le \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} \le \frac{4}{3} t^{2n+2}$

b) En déduire que $0 \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} \le \frac{4}{3(2n+3)}$

c) Conclure

Exercice 05

Partie A

1) Montrer que pout tout réel t strictement positif $\ln t \le t-1$

2) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-\ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au pont d'abscisse 1

b) Tracer T et $\mathscr{C}$

5) Soit $x > 1$ et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 1 + \frac{\ln x}{x} + \ldots + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$

Montrer que (v_n) est convergente et préciser sa limite

Partie B

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{t}{\ln t - t} dt$

1) Etudier le sens de variation de F

2) Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0;1]$, $0 \le \frac{x}{x-\ln x} \le x$

b) En déduire que pour tout $x \in]0;1]$, $\frac{x^2-1}{2} \le f(x) \le 0$ et que $-\frac{1}{2} \le \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \le 0$

4) Montrer que pour tout $x \ge 1$, $f(x) \ge 1$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

5) a) Soit $x > 0$. Calculer $\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt$ et $\int_1^x (1+\ln t)\, dt$

b) Montrer que pour tout $t \ge 1$, $\frac{t}{t-\ln t} \le 1 + \ln t$

c) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $F(x) \leq x \ln x$

d) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $x + \frac{(\ln x)^2}{2} - 1 \leq F(x)$

e) Donner un encadrement de l'intégrale $\int_1^e \frac{t}{t - \ln t} dt$