Lycée de Sbeïtla | **A – S** : 2016 - 2017

Mathématiques

4ème Maths

DEVOIR DE CONTRÔLE N° 02

Durée : 2 heures

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01 : (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère la courbe $\mathscr{H}$ d'équation $9x^2-16y^2=144$

1) Montrer que $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont on déterminera l'excentricité e, les foyers et les directrices associées et une équation de chacune de ses asymptotes Δ et Δ'

2) Soit M_0 le point de $\mathscr{H}$ d'abscisse $4\sqrt{2}$ et d'ordonnée y_0 positive

a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $\mathscr{H}$ en M_0

b) (T) rencontre Δ en I et Δ' en J. Montrer que M_0 est le milieu de $[IJ]$

Exercice 02 : (8 points)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AC=1$

On désigne par I le milieu du segment $[BC]$ et par J le milieu de $[AC]$

1) Soit f la similitude directe qui envoie C en A et B en C

a) Déterminer l'angle de f

b) Soit O le centre de f. Montrer que O est le projeté orthogonal de C sur (AB)

c) Déterminer le rapport de f

2) Déterminer $f(I)$

3) Soit φ la similitude indirecte de centre A et qui transforme C en B

a) Déterminer le rapport de φ

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\psi=\varphi\circ f$

4) On pose $\sigma=f\circ S_{(CO)}$ où $S_{(CO)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (CO)

a) Préciser la nature de σ et donner son rapport

b) Soit Δ l'axe de σ et C' le point tel que $\overrightarrow{OC'}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OC}$

Prouver que Δ est la médiatrice du segment $[C'A]$

5) Soit E l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Montrer que $R=(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE})$ est un repère orthonormé directe du plan

b) Déterminer l'affixe de B dans le repère R

c) Déterminer l'écriture complexe de f

d) En déduire l'affixe de O centre de f

Exercice 03 : (8 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=x^2\sqrt{4-x^2}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0;2[$ et que $f'(x)=\dfrac{x(8-3x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$ pour tout x de $[0;2[$

   b) Dresser le tableau de variation de f

   c) Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer le volume v du solide obtenu par rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe $(O;\vec{i})$

3) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

   A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathscr{A}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1\frac{t^4}{\sqrt{4-t^2}}dt$

4) Soit F la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^{2\sin x}\frac{t^4}{\sqrt{4-t^2}}dt$

   a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x)=16\sin^4 x$, pour tout $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

   b) Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$

   c) En déduire que $F(x)=6x-4\sin 2x+\dfrac{1}{2}\sin 4x$, pour tout $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

   d) Détermine alors la valeur de $\displaystyle\int_0^1\frac{t^4}{\sqrt{4-t^2}}dt$ puis déterminer $\mathscr{A}$