Fonction logarithme népérien

Section Mathématiques 4ème

I – Définition et premières propriétés

Définition

On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 .On note cette fonction « ln » ou « Log »

Ainsi on a : $\forall x>0$, $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$

Premières propriétés

- Il résulte de la définition que la fonction ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- $\ln\,(1)=0$
- Il existe et unique $x\in\,]2;3[$ tel que $\ln x = 1$

Soient a et b deux réels strictement positifs on a :

- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a<b$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a=b$
- $\ln a = 0 \Leftrightarrow a=1$
- $\ln a > 0 \Leftrightarrow a>1$
- $\ln a < 0 \Leftrightarrow 0<a<1$

II– Etude et représentation graphique de la fonction ln

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un entier naturel tel que $0\le k\le n-1$

Alors on a : Si $2^k \le t \le 2^{k+1} \Rightarrow \frac{1}{2^{k+1}} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{2^k} \Rightarrow \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} \ge \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{2^{k+1}} \Rightarrow \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} \ge \frac{2^{k+1}-2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} \ge \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^{2^n} \frac{dt}{t} \ge \frac{n}{2} \Rightarrow \ln(2^n) \ge \frac{n}{2}$

Soit $A>0$ et $n_0 = E(A)+1$

Pour tout $x > 2^{2n_0}$; $\ln x > \ln(2^{2n_0}) > \frac{2n_0}{2} = n_0$ et puisque $n_0 > A$ alors $\forall x > 2^{n_0}, \ln x > A$

Donc la fonction ln est non majorée

Ainsi la fonction ln est croissante et non majorée alors $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

- Soient $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$; $x>0$

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall\ x>0$, $f'(x)=\frac{1}{x}$

La fonction $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u\big(]0;+\infty[\big) =]0;+\infty[$ alors la fonction

$g = -(f\circ u)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$,$g'(x) = -u'(x).f'(u(x)) = \frac{1}{x^2}.\frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} = f'(x)$

Ainsi $\forall x>0$,$g'(x)=f'(x) \Rightarrow \forall x>0$; $g(x)=f(x)+c$ où $c\in\mathbb{R}$

Or $g(1)=f(1)=0$ alors $c=0$ donc $\forall x>0; g(x)=f(x) \Rightarrow \forall x>0;\ -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=\ln x$

Par suite $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right))=\lim\limits_{t\to+\infty}(-\ln t)=-\infty$

On en déduit que l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe représentative de la fonction ln

$\bullet \forall t\geq 1\,;\, t\geq\sqrt{t} \Rightarrow \forall t\geq 1; \dfrac{1}{t}\leq\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\forall x\geq 1;\ \int_1^x\dfrac{dt}{t}\leq\int_1^x\dfrac{dt}{\sqrt{t}} \Rightarrow \ln x\leq 2\sqrt{x}-2$

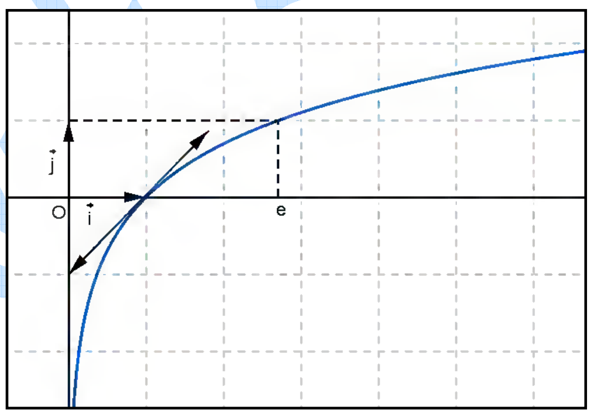
Ainsi $\begin{cases} 0\leq\dfrac{\ln x}{x}\leq\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x}\,,\forall x\geq 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}0=0\end{cases}$ Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction ln admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

• Tableau de variations de la fonction ln

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$+$	
$\ln$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

• Courbe représentative de la fonction ln



La fonction ln réalise une bijection strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

L'unique réel x tel que $\ln x=1$ est notée e, ainsi $\ln e=1$, $e\approx 2{,}71828$

Compléments

- La fonction ln est dérivable en 1 est $\ln'(1)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$
- $\forall x>0$ on pose $t=\dfrac{1}{x}$, lorsque $x\to 0^+, t\to+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}-x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}-\dfrac{\ln t}{t}=0$

Théorème

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

III- Propriétés algébriques

On considère les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$ et $g(x)=\ln(ax)$ où $a>0$

- g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0,\ g'(x)=a.\dfrac{1}{ax}=\dfrac{1}{x}=f'(x)$
- $\forall x>0,\ g'(x)=f'(x)\Rightarrow \forall x>0, g(x)=f(x)+c$, où $c\in\mathbb{R}$ donc $\forall x>0,\ \ln(ax)=\ln x+c$ en particulier $\ln a=\ln 1+c\Rightarrow c=\ln a$ donc $\forall x>0,\ a>0\ \ln(ax)=\ln x+\ln a$
- Pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln\left(a.\dfrac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=\ln a-\ln b$

Théorème

Pour tout réels strictement positifs a et b

- $\ln(ab)=\ln a+\ln b$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$

Soit a un réel strictement positif

- Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, \ln(a^n)=n\ln(a)$

  Pour $n=0$, $\ln(a^0)=\ln 1=0=0.\ln a$

  Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $\ln(a^n)=n\ln(a)$ et montrons que $\ln(a^{n+1})=(n+1)\ln(a)$

  On a par hypothèse de récurrence : $\ln(a^n)=n\ln(a)$

  Donc $\ln(a^{n+1})=\ln(a^n.a)=n\ln(a)+\ln a=(n+1)\ln a$

  <u>Conclusion</u> : $\forall n\in\mathbb{N}, \ln(a^n)=n\ln(a)$

- Soit $n\in\mathbb{Z}_-^*$ alors $\ln(a^n)=\ln\left(\dfrac{1}{a^{-n}}\right)=-\ln(a^{-n})=-(-n)\ln a=n\ln a$ (car $-n\in\mathbb{N}$)

  En fin $\forall n\in\mathbb{Z}, \ln(a^n)=n\ln(a)$

- Soit n entier tel que $n\geq 2$ alors $a=(\sqrt[n]{a})^n \Rightarrow \ln a=\ln\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=n\ln(\sqrt[n]{a})\Rightarrow \ln(\sqrt[n]{a})=\dfrac{1}{n}\ln a$

Théorème

Soit a un réel strictement positif

- $\forall n\in\mathbb{Z}\ ,\ln(a^n)=n\ln a$
- $\forall n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2,\ \ln(\sqrt[n]{a})=\dfrac{1}{n}\ln a$

IV- Autres limites

Soient p un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 2

- $\forall x>0$, $$\frac{(\ln x)^n}{x^p}=\frac{\left(\dfrac{1}{p}\ln(x^p)\right)^n}{\left(\sqrt[n]{x^p}\right)^n}=\frac{\left(\dfrac{1}{p}\ln\left(\sqrt[n]{x^p}\right)^n\right)^n}{\left(\sqrt[n]{x^p}\right)^n}=\frac{\left(\dfrac{n}{p}\ln(\sqrt[n]{x^p})\right)^n}{\left(\sqrt[n]{x^p}\right)^n}=\left(\frac{\dfrac{n}{p}\ln(\sqrt[n]{x^p})}{\sqrt[n]{x^p}}\right)^n$$

  Posons $t=\sqrt[n]{x^p}$, lorsque $x\to+\infty,\ t\to+\infty$

  Alors $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{n}{p}\ln(\sqrt[n]{x^p})}{\sqrt[n]{x^p}}\right)^n=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{n}{p}.\frac{\ln t}{t}\right)=0$$

- $$\lim_{x\to0^+}\left|x^p(\ln x)^n\right|=\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{t^p}\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^n\right|=\lim_{t\to+\infty}\left|(-1)^n\frac{(\ln t)^n}{t^p}\right|=\lim_{t\to\infty}\left|\frac{(\ln t)^n}{t^p}\right|=0\Rightarrow\lim_{x\to0^+}x^p(\ln x)^n=0$$

Théorème

Pour tous entiers naturels non nuls n et p : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^n}{x^p}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}x^p(\ln x)^n=0$

V– Fonctions $x\mapsto\ln(u(x)),x\mapsto\ln|u(x)|$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x\in I,u(x)>0$ alors la fonction $f:x\mapsto\ln(u(x))$ est dérivable sur I et $\forall x\in I,f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Démonstration

On a : $f=g\circ u$, où $g:x\mapsto\ln x$

$$\left.\begin{array}{l}u \text{ est dérivable sur } I \text{ et } u(I)\subset]0;+\infty[\\ g \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[\end{array}\right\}\text{alors } g\circ u \text{ est dérivable sur } I$$

Ce qui implique f est dérivable sur I et $\forall x\in I,f'(x)=u'(x).g'(u(x))=u'(x).\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x\in I,u(x)\neq0$ alors la fonction $f:x\mapsto\ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $\forall x\in I,f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Démonstration

On a : $\forall x\in I,u(x)\neq0$ alors u garde un signe constant sur I

- Si $\forall x\in I,u(x)>0$ alors d'après le théorème précédent f est dérivable sur I et $\forall x\in I,f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
- Si $\forall x\in I,u(x)<0$ alors $\forall x\in I,\ f(x)=\ln(-u(x))$ et comme u est dérivable sur I alors la fonction $-u$ est dérivable sur I $\forall x\in I,-u(x)>0$ donc f est dérivable sur I et $\forall x\in I,f'(x)=-u'(x).\dfrac{1}{-u(x)}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x\in I,u(x)\neq0$ alors la fonction $f:x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive sur I la fonction $F:x\mapsto\ln|u(x)|+k$, où $k\in\mathbb{R}$

On se propose de chercher une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f:x\mapsto\ln x$

La fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=\int_e^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en e

$\forall t > 0$, on pose $g'(t) = 1 \rightarrow g(t) = t$ et $f(t) = \ln t \rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t}$ Alors d'après le théorème d'intégration par parties :

$\forall x > 0$, $F(x) = [g(t).f(t)]_e^x - \int_e^x g(t)f'(t)dt = [t\ln t]_e^x - \int_e^x t.\dfrac{1}{t}dt = x\ln x - e - \int_e^x dt = x\ln x - x$

Théorème

> La fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$