Professeur : Elabidi Zahi	**Lycée de Sbeïtla** **Série d'exercices** Thème : Suites réelles — Année scolaire : 2012 // 2013	**Mathématiques** **$4^{ème}$ Maths**

Exercice 01

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 \text{ un réel donné} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+1}} - 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Pour quelle valeur de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?

2) On suppose que $u_0 \in]-1;0[$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0$ et que (u_n) est une suite décroissante

b) En déduire que (u_n) est convergente

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} + 1 < \dfrac{u_n+1}{\sqrt{u_0^2+1}}$

d) On pose $k = \dfrac{1}{\sqrt{u_0^2+1}}$ .Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n + 1 < k^n(u_0+1)$

e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 02

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1$

1) a) Etudier le sens de variation de P_n sur $\mathbb{R}_+$

b) En déduire que P_n admet une unique racine $\alpha_n \in]0;1[$

c) Pour $n = 2$ déterminer la valeur exacte de α_2

2) a) Etudier la monotonie de la suite (α_n)

b) La suite (α_n) est – elle convergente ?

3 a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{n+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

Exercice 03

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$

1) Etudier les variations de f sur $[0;1]$

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Calculer $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}$ en fonction de u_{n-1}

b) Montrer que $n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}} \leq 1 + \dfrac{1}{n}$

c) En déduire que $n \in \mathbb{N}^*,\ n < \dfrac{1}{u_n} - 1 \leq n + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

4) Soit (v_n)la suite définie sur $\mathbb{N}^*$par : $v_n = nu_n$

a) Montrer que la suite (v_n) est convergente

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$; $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} < 2\sqrt{n}$ .En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$