Mathématiques

$4^{ème}$ Maths

Lycée secondaire de Sbeïtla
Série d'exercices
Thème : Géométrie dans l'espace

Année scolaire : 2014 // 2015

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ .On considère les points $A(0;1;0)$, $B(1;0;-2)$ et $C(0;0;-1)$

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

   b) On note P le plan (ABC).Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x-y+z+1=0$

2) Soit le point $H(1;-1;0)$

   a) Vérifier que H n'appartient pas à P

   b) Calculer le volume du tétraèdre HABC

3) Soit $S=\{M(x;y;z) \text{ tel que } x^2-2x+y^2+2y+z^2-2=0\}$

   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon

   b) Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle $\mathscr{C}$ que l'on caractérisera

4) Soit h l'homothétie de centre $\Omega(1;1;2)$ et de rapport 3

   a) Donner l'expression analytique de h

   b) Déterminer une équation de la sphère $S'=h(S)$ et du plan $P'=h(P)$

Exercice 02

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(3,1,0)$, $B(1,2,0)$, $C(3,2,1)$ et $D(0,0,m)$ où m est un réel strictement positif

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

   b) En déduire l'aire du triangle ABC

   c) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C
   Vérifier que $D\notin P$

2) Déterminer en fonction de m le volume du tétraèdre ABCD

3) Soit $S_m=\{M(x,y,z) \text{ de l'espace tel que}: x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0\}$

   a) Montrer que pour tout réel m strictement positif S_m est une sphère dont on précisera le centre et le rayon

   b) Montrer que S_m est tangente à P, si et seulement si $m=2$ .Montrer dans ce cas que la droite (DB) est perpendiculaire à P

   c) En déduire le point de contact de S_2 et P

4) Soit h l'homothétie de centre $\Omega(3,1,1)$ et de rapport 2

   a) Déterminer l'expression analytique de h

   b) En déduire les images de S_m et P par h

Exercice 03 (Bac Tunisien 2008)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(3,2,6)$, $B(1,2,4)$ et $C(4,-2,5)$

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

   b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés

   c) Calculer le volume du tétraèdre OABC

2) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).Montrer que $OH=\frac{4}{3}$

3) Soit S la sphère de centre O et passant par A

   a) Justifier que l'intersection de S avec le plan (ABC) est un cercle $\mathscr{C}$ de centre H

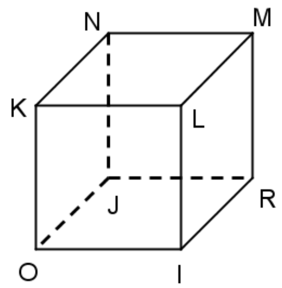
   b) Calculer le rayon de $\mathscr{C}$

Exercice 04

Soit OIRJKLMN un cube d'arrête 1

On muni l'espace du repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$

Soit B le point vérifiant $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IL}$ et A le point défini par $\overrightarrow{KA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$



1) a) Déterminer les coordonnées des points A et B

   b) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$

   c) Montrer alors que l'aire du triangle OAB est $\frac{11}{18}$

2) Montrer que le point $H(3,0,1)$ appartient au plan (OAB)

3) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par H et perpendiculaire à (OAB)

4) Soit $S=\{M(x,y,z)\text{ de l'espace tels que : }x^2+y^2+z^2-2x+18y-14z+127=0\}$

   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon r

   b) Vérifier que Ω appartient à Δ

   c) Caractériser alors $S\cap(OAB)$

5) On désigne par A' et B' les points d'intersection de S et Δ .Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ qui transforme S en une sphère S' de centre Ω' qui soit tangente à (OAB) en H

   a) Montrer que $\Omega'\in\Delta$

   b) Donner les possibilités du vecteur $\vec{u}$ de t