Mathématiques

$4^{ème}$ Maths

Lycée secondaire de Sbeïtla
Série d'exercices
Thème : Coniques

Année scolaire : 2014 // 2015

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01

Dans le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère la courbe (P) d'équation $2x+3y^2+4y-1=0$

1) a) Montrer que (P) est une parabole dont on déterminera le sommet S, le foyer F et la directrice D

b) Construire (P)

2) Soit M_0 le point de (P) d'abscisse (-3) et d'ordonnée $y_0 \geq 0$

a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (P) en M_0

b) Donner une équation de la perpendiculaire (N) à (T) en M_0

3) (T) coupe l'axe focal Δ de (P) au point I et (N) coupe Δ en J

a) Montrer que F est le milieu du segment $[IJ]$

b) Soit K le projeté orthogonal de M_0 sur Δ. Montrer que $JK=\frac{1}{3}$

Exercice 02

1) Soit D une droite fixe du plan et F un point non situé sur D. La perpendiculaire à D en un point variable H de D coupe la perpendiculaire menée de F à (FH) en N

Soit M le milieu de [HN]. Montrer que M vari sur une parabole (P) dont on précisera le foyer et la directrice

2) On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et on donne $F(\frac{3}{2};-1)$ et $D: x=-1$

a) Montrer que la parabole (P) a pour équation : $y^2-5x+2y+\frac{9}{4}=0$

b) Préciser le sommet de (P) puis la tracer

3) a) Vérifier que le point $A\left(\frac{21}{20};1\right)$ appartient à (P) puis écrire une équation de la tangente T à (P) en A

b) La droite T coupe D en K. Montrer que le triangle AFK est rectangle en F

Exercice 03

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère la parabole P d'équation $y^2=2x$ et on désigne par M et M' les points de coordonnées respectives $\left(\frac{t^2}{2};t\right)$ et $\left(\frac{1}{2t^2};-\frac{1}{t}\right)$ où t est un réel non nul

1) a) Déterminer les coordonnées du foyer F de P et l'équation de sa directrice D

b) Tracer P

c) Vérifier que les points M et M' appartienne à P

2) On désigne par T et T' les tangentes à P respectivement en M et M'

a) Montrer que les points M, F et M' sont alignés

b) Ecrire les équations des tangentes T et T'. En déduire que $T \perp T'$

c) On désigne par H l'intersection de T et T'. Déterminer l'ensemble décrit par H quand t décrit $\mathbb{R}^*$

Exercice 04

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; on considère la courbe ζ d'équation: $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$

1) Montrer que ζ est une ellipse dont on précisera l'excentricité e, le centre Ω, les foyers F et F' et les directrices associées D et D'

2) a) Déterminer les points d'intersection de ζ et l'axe des ordonnées (On désigne par M_1 le point d'ordonnée positive)

b) Déterminer les sommets de ζ puis la tracer

3) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à ζ en M_1

b) Soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs de F et F' sur (T)
Montrer que $FH.F'H' = 3$

Exercice 05

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0;2[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;2[$

b) Dresser le tableau de variations de f puis tracer $\mathscr{C}$

c) On suppose que l'œuf d'un oiseau a la forme d'un solide de révolution obtenu par rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe $(O; \vec{i})$
Calculer le volume $\mathscr{V}$, en unité de volume, de cet œuf

2) Soit $\mathscr{C}'$ le symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $(O; \vec{i})$, on note $\Gamma = \mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$

a) Montrer que Γ a pour équation $(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

b) Montrer que Γ est une ellipse dont on précisera le centre Ω, l'excentricité e et les foyers F et F'

c) En déduire une équation de la tangente (T) à Γ en son point M_0 d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ et d'ordonnée y_0 positive

d) On note H et H' les projetés orthogonaux respectifs des foyers F et F' sur (T)
Montrer que $FH.F'H' = 1$

3) On désigne par F la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{1+\cos x} f(t)\,dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0;\pi]$ et que pour tout x de $[0;\pi]$, $F'(x) = -2\sin^2 x$

b) Calculer $F(\pi)$ et en déduire l'expression de $F(x)$ pour tout x de $[0;\pi]$

c) Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire de l'intérieur de l'ellipse Γ

4) On pose : $u_0 = 2\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2\int_0^2 x^n\sqrt{2x-x^2}\,dx$

a) Calculer $u_0 - u_1$, en déduire u_1

b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n+1} = \int_0^2 x^n(2-2x)\sqrt{2x-x^2}\,dx$ puis montrer, à l'aide d'une intégration par parties que $u_{n+1} = \left(\dfrac{2n+3}{n+3}\right)u_n$

c) En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 (x^2-2x+3)\sqrt{2x-x^2}\,dx$

d) Montrer que (u_n) est croissante .En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \pi$

e) Montrer que si la suite (u_n) converge vers l alors $l = 0$. Conclure

Exercice 06 (Bac Tunisien 1998)

Soit u un nombre complexe et soit l'équation $(E_u): z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2iu\bar{u} = 0$ où $\bar{u}$ est le nombre complexe conjuguée de u

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_u) .On désigne par z' et z'' les solutions de cette équation

2) On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et on désigne par A, M, M' et M'' les points d'affixes respectives $2i$, u, z' et z''

Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M tels que les points A, M' et M'' soient alignés

a) Trouver une équation cartésienne de $\mathscr{H}$

b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets, et les asymptotes

c) Vérifier que $\mathscr{H}$ passe par le point O et donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{H}$ en O

d) Tracer $\mathscr{H}$