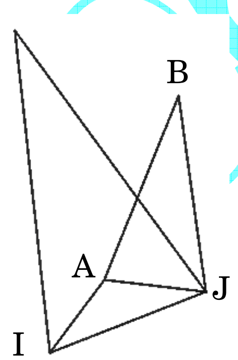
Exercice 01 : (Bac Tunisien 2012 – Session principale)

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C



1) a) Déterminer $r_C(I)$

   b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$

   c) En déduire que $r_B \circ t = r_c$

2) Soit $K = t(C)$

   Montrer que $BC = BK$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

   a) Soit O le milieu de $[AC]$. Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC

   b) Montrer que ABCD est un parallélogramme

Exercice 02 : (Bac Tunisien 2012 – Session de contrôle)

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[AD]$

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S

   b) En déduire $S(C)$

3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S

   b) En déduire que $S(D) = K$

   c) Soit Ω le centre de S.
      Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(C,1)$ et $(K,4)$

   d) Soit E le milieu du segment $[OD]$. Montrer que $S \circ S(A) = E$

   e) Construire Ω

4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes

Exercice 03 : (Bac Tunisien 2013 – Session de contrôle)

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre, ABCD est rectangle tel que $AB = 1$ et $AD = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et FCDE et BFGH sont des carrés

1) On pose $q = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

a) Montrer que $q^2 = 1 - q$

b) Vérifier que $FG = q$ et que $EG = q^2$

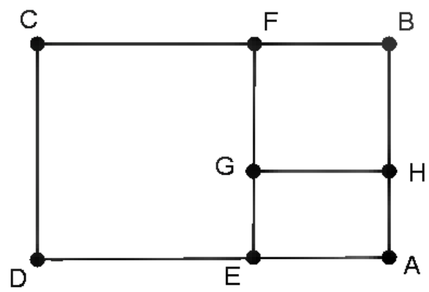
2) Soit S_1 la similitude directe de centre F, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport q

a) Montrer que $S_1(C) = G$

b) Déterminer l'image du carré FCDE par S_1

3) Soit S_2 la similitude directe de centre G qui transforme H en E

Montrer que S_2 est de rapport q et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$



4) On pose $h = S_2 \circ S_1$

a) Montrer que $h(D) = E$

b) Montrer h est une homothétie de rapport q^2

c) Montrer que $\overrightarrow{AE} = q^2\overrightarrow{AD}$ et en déduire le centre de h

d) Montrer que les points A, G et C sont alignés

e) Soit $I = h(E)$ et $J = h(F)$.

Construire les points J et I et déterminer alors l'image du carré BFGH par S_2

5) On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = q^{2n}$

a) Vérifier que a_0, a_1 et a_2 sont les aires respectives des carrés FCDE, BFGH et GEIJ

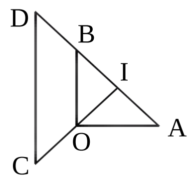
b) On pose pour tout entier naturel n, $A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n$. Exprimer A_n en fonction de n et vérifier que la limite de A_n est égale à l'aire du rectangle ABCD

Exercice 04 : (Bac Tunisien 2008 – Session principale)

Le plan est orienté dans le sens direct

OAB est un triangle rectangle et isocèle tel que $OA = OB$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B. (voir figure)



Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD

b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC). Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f

3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D

a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire $g(O)$

b) Déterminer les images de C et D par $g \circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g \circ f^{-1}$

4) Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$

a) Déterminer les images des points J et I' par $g \circ f^{-1}$

b) Montrer que les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) sont concourantes

Exercice 05 : (Bac Tunisien 2009 – Session principale)

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC isocèle rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB],[BC],[AC]$ et $[JC]$

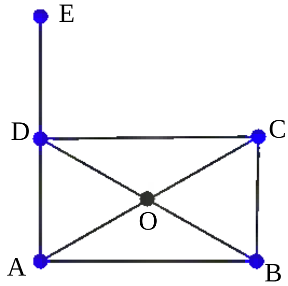
1) Faire une figure
2) Soit f la similitude directe de centre J qui envoie A sur K
   a) Déterminer l'angle et le rapport de f
   b) Justifier que $f(K) = L$
   c) Soit H le milieu du segment $[AJ]$.Justifier que $f(I) = H$
3) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

Soit φ l'application du plan dans lui même qui à tout M point d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z} + \frac{1+i}{2}$
   a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C
   b) Donner les affixes des points I , J, K et H
   c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$
   d) Déduire alors que $\varphi = f \circ S_{(IK)}$, où f est la similitude définie dans 2) et $S_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)
4) Soit Δ l'axe de la similitude φ
   a) Tracer Δ
   b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q
   Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$

Exercice 06 : (Bac Tunisien 2009 – Session de contrôle)

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D. (voir figure)



Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) a) Justifier que $S(A) = B$
   b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral
   En déduire que $S(E) = O$
2) Soit I un point du segment $[EO]$ distinct des points E et O
   et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A.
   Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P
   a) Reproduire la figure et tracer (Γ) et placer les points M et P
   b) Justifier que le point C appartient (Γ)
3) Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP)
   a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$
   b) En déduire que $S(M) = N$
4) Montrer que les points B, D et N sont alignés