Professeur : Elabidi Zahi	**Lycée de Sbeïtla** **Série d'exercices** Thème : Nombres complexes Année scolaire : 2014 // 2015	**Mathématiques** **4ème Maths**

Exercice 01

Cocher la réponse correcte

N^0	Questions	Réponses a	b	c
1	Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $\lvert z\rvert+2z=13+6i$, alors $z=$	3+4i	$4-3i$	$4+3i$
2	Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $\lvert z\rvert=3$, alors $\bar{z}=$	$\bar{z}=\frac{9}{z}$	$\bar{z}=\frac{3}{z}$	$\bar{z}=\frac{\sqrt{3}}{z}$
3	Soit $z=1+e^{i\theta}$ où $\theta\in\mathbb{R}$ alors $\lvert z\rvert=$	2	$\sqrt{2(1+\cos\theta)}$	$\sqrt{2}$
4	Un argument de $(1+i)^{2013}$ est :	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
5	Soit $z=e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}$ alors un argument de z est :	$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
6	Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $\lvert z\rvert=\sqrt{2}$, alors : $\lvert\bar{z}+i\bar{z}\rvert=$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{2}$	2
7	Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z' alors $\vec{u}\perp\vec{v}$ si et seulement si :	$\frac{z'}{z}$ est réel	$\bar{z}.z'$ est imaginaire	$\bar{z}.z'=1$
8	Soit $z\in\mathbb{C}$ alors $\lvert z+i\rvert=$	$\lvert i\bar{z}+1\rvert$	$\lvert z\rvert+1$	$\lvert z+1\rvert$

Exercice 02

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soient A et B les points d'affixes respectives $-i$ et i

Soit $f:P\setminus\{A\}\to P$

$$M(z)\mapsto M'(z') \text{ tel que } z'=\frac{z-i}{z+i}$$

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' soit réel

2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ lors que M' décrit le cercle de centre O et de rayon 1

3) a) Vérifier que $(z'-1)(z+i)=-2i$

b) Montrer que si M appartient au cercle de centre A et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on caractérisera

4) On pose $z=e^{i\alpha}$ où α est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que $e^{i\alpha}+i=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ et que $e^{i\alpha}-i=2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

b) En déduire la forme exponentielle de z'

c) Soit C le point d'affixe $e^{i\alpha}$. Montrer que : ABC est triangle rectangle

d) Déterminer la valeur de α pour que ABC soit isocèle en C

Exercice 03

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

On considère, pour tout réel $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $E_\theta : z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1-i)e^{i2\theta} = 0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

2) On considère les points M' et M'' d'affixes respectives $2e^{i\theta}$ et $-2(1-i)e^{i\theta}$ et le point N image de M' par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer l'ensemble décrit par M' lors que θ varie dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

b) Déterminer l'affixe du point N

c) Montrer que $OM'NM''$ est un parallélogramme

d) En déduire une construction du point M'' à partir de M'

3) a) Déterminer en fonction de θ, le module et un argument de $-2(1-i)e^{i\theta}$

b) Déterminer l'ensemble des points M'' lorsque θ varie dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

4) Soit l'équation $E_\theta' : (\sqrt{2}z-1)^3 = (-2+2i)e^{i\theta}z^3$

a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $(-2+2i)e^{i\theta}$

b) Soit $\alpha \in]0,\pi[$ .Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad , \quad \frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \sqrt{2}e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i\cot g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

c) En déduire les solutions de l'équation (E_θ')

Exercice 04

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives 2 et 3

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 6 = 0$

b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = 2 + i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - i\sqrt{2}$

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_1 - 3}{z_1}$

En déduire que le triangle OBM_1 est un triangle rectangle

c) Montrer que les points O, B, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle ζ que l'on précisera

Tracer ζ et placer les points M_1 et M_2

2) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 - 4z + 6$

On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

a) Vérifier que $z' - 2 = (z-2)^2$

b) Soit M le point de Γ d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Vérifier que le point $M' = f(M)$ appartient à un cercle Γ' que l'on précisera. Tracer Γ'

3) Soit D le point d'affixe $d = 2 + \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$ et on désigne par D' l'image de D par f

a) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $d - 2$

En déduire que D est situé sur le cercle Γ

b) Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{AD'})$ et placer le point D'

c) Montrer que le triangle DAD' et équilatéral

Exercice 05

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\frac{z}{|z|}(2-|z|)$

On désigne par ζ_1, le cercle de centre O et de rayon 1 .Et pour tout nombre complexe non nul z, on note $z=re^{i\alpha}$ où r est le module de z et α un argument de z

1) Soit A le point d'affixe 3 .Déterminer l'affixe du point $A'=f(A)$

2) Soit B le point d'affixe $b=-\sqrt{3}+i$

a) Ecrire b sous forme exponentielle

b) Déterminer l'affixe b' du point B', image du point B par f

4) Placer les points A, B, A' et B' dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

5) Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan, d'affixe non nul, dont l'image par f est O

6) Déterminer l'ensemble des points invariants par f

7) Soit M un point du plan distinct de O, n'appartenant au cercle ζ_1

On désigne par I le milieu du segment $[MM']$ où M' et l'image de M par f

a) Montrer que $I\in\zeta_1$

b) Montrer que I appartient à la demi droite $[OM)$

c) Soit M_1 un point du plan distinct de O, n'appartenant au cercle ζ_1

Construire le point M_1' image de M_1 par f

Exercice 06

Soit θ un réel de $]0;\pi[$ et l'équation $(E): z^2-e^{i\theta}(1+e^{i\theta})z+e^{i3\theta}=0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 1 , $e^{i\theta}$ et $e^{i2\theta}$

a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $|1+e^{i\theta}|=1$

3) a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $1+e^{i\theta}$

b) En déduire la valeur de θ pour la quelle ABC est un triangle équilatéral

c) Pour la valeur du θ trouvée résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8-e^{i\theta}(1+e^{i\theta})z^4+e^{i3\theta}=0$