

**Exercice 01** (Bac Tunisien 2015 – Session principale)

- 1) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $47x + 53y = 1$ 
  - a) Vérifier que  $(-9; 8)$  est une solution de (E)
  - b) Résoudre l'équation (E)
  - c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53
  - d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53
- 2) a) Justifier que  $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$
- b) Déterminer alors le reste de  $45^{106}$  modulo 53
- 3) Soit  $N = 1 + 45 + 45^2 + \dots + 45^{105} = \sum_{k=0}^{105} 45^k$ 
  - a) Montrer que  $44N \equiv 10 \pmod{53}$
  - b) En déduire le reste de N modulo 53

**Exercice 02**

- 1) a) Vérifier que 503 est un nombre premier
- b) Montrer que  $7^{502} \equiv 1 \pmod{503}$  puis en déduire que  $7^{2008} \equiv 1 \pmod{503}$
- 2) Considérons dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $49x - 6y = 1$   
Vérifier que  $(1; 8)$  est une solution particulière de (E) puis la résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- 3) Soit  $n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$ 
  - a) Montrer que le couple  $(7^{2006}; n)$  est une solution de (E)
  - b) Montrer que  $n \equiv 0 \pmod{4}$  et que  $n \equiv 0 \pmod{503}$
  - c) En déduire que n est divisible par 2012

**Exercice 03**

Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul

On pose  $S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$

- 1) a) Ecrire S sous forme d'un quotient
- b) Calculer l'expression  $p^n + (1-p)S$  et en déduire que  $p^n$  et  $(1-p)$  sont premiers entre eux
- 2) a) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , l'équation  $p^n x - (1-p)y = p$
- b) En déduire, dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , les solutions de l'équation  $10^n x + 2^{n+2} y - 10 \cdot 2^{n-1} = 0$

**Exercice 04**

- 1) Vérifier que 101 est un nombre premier
- 2) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $77x + 100y = 1$ 
  - a) Vérifier que le couple  $(13, -10)$  est une solution de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- b) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E)
- 3) On considère dans  $\mathbb{N}$  l'équation (F) :  $x^{77} \equiv 3 \pmod{101}$   
 Soit x une solution de F
- a) Montrer que x et 101 sont premiers entre eux puis que  $x^{100} \equiv 1 \pmod{101}$
- b) Montrer que  $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$
- 4) Soit x un entier naturel Montrer que si  $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$  alors x est une solution de (F)
- 5) En déduire que l'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des entiers naturels de la forme  $101k + 38$ , où  $k \in \mathbb{N}$

### Exercice 05

- 1) On considère l'équation (E) :  $13x - 7y = 5$  où  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- a) Vérifier que le couple (2;3) est une solution particulière de (E)
- b) Résoudre l'équation (E)
- c) Le plan est rapporté à un repère cartésien  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Déterminer les points de coordonnées entières comprises entre 0 et 30 appartenant à la droite d'équation :  $13x - 7y - 5 = 0$
- 2) Soit n un entier vérifiant le système : 
$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{13} \\ n \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$
- Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 91
- 3) Pour tout entier k, on pose :  $a = 7k + 2$  et  $b = 13k + 3$  et on note :  $d = a \wedge b$
- a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?
- b) Montrer que :  $d = 5$  équivaut à  $k \equiv 4 \pmod{5}$
- c) Déduire le PGCD des nombres :  $7 \times 2014^{2p+1} + 2$  et  $13 \times 2014^{2p+1} + 3$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$

### Exercice 06 (Bac Tunisien 2012 – Session de contrôle)

- 1) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $7x + 18y = 9$
- a) Vérifier que le couple (9; -3) est une solution particulière de (E)
- b) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E)
- 2) Résoudre alors dans  $\mathbb{Z}$ , le système 
$$\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{7} \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$$



## CORRECTION

### Correction de l'exercice 01

1) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $47x + 53y = 1$

a) On  $47 \times (-9) + 53 \times 8 = -423 + 424 = 1 \Rightarrow (-9; 8)$  est une solution de (E)

b)  $(x; y)$  est une solution de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow 47x + 53y = 47 \times (-9) + 53 \times 8$

$$\Rightarrow 47(x + 9) = 53 \times (8 - y) \Rightarrow \begin{cases} 53 \text{ divise } 47(x + 9) \\ 47(x + 9) = 53 \times (8 - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 53 \text{ divise } (x + 9) \text{ car } 53 \wedge 47 = 1 \\ 47(x + 9) = 53 \times (8 - y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 53k - 9 ; k \in \mathbb{Z} \\ 47(x + 9) = 53 \times (8 - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 53k - 9 ; k \in \mathbb{Z} \\ 47 \times 53k = 53 \times (8 - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 53k - 9 ; k \in \mathbb{Z} \\ y = -47k + 8 \end{cases}$$

Réciproquement :  $\forall k \in \mathbb{Z}, 47 \times (53k - 9) + 53 \times (-47k + 8) = 47 \times (-9) + 53 \times 8 = 1$

Donc  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(53k - 9; -47k + 8) ; k \in \mathbb{Z}\}$

c)  $x$  est un inverse de 47 modulo 53  $\Leftrightarrow 47x \equiv 1 \pmod{53}$

$\Leftrightarrow$  il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $47x = 1 + 53p \Leftrightarrow 47x + 53(-p) = 1 \Leftrightarrow (x; -p)$  est une solution de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 53k - 9 ; k \in \mathbb{Z}$

Donc l'ensemble des inverse de 47 modulo 53 est  $\{53k - 9 ; k \in \mathbb{Z}\}$

d) Soit  $x$  le plus petit inverse positif de 47 modulo 53 alors :

$$\begin{cases} 53k - 9 > 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > \frac{9}{53} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \geq 1 \text{ donc le plus petit inverse positif de 47 modulo 53}$$

correspond à  $k = 1$  donc  $53 \times 1 - 9 = 44$  est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53

2) a)  $\left. \begin{array}{l} 53 \text{ est un nombre premier} \\ 53 \wedge 45 = 1 \end{array} \right\} \text{ alors d'après Fermat } 45^{53-1} \equiv 1 \pmod{53} \Rightarrow 45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$

b)  $45^{52} \equiv 1 \pmod{53} \Rightarrow (45^{52})^2 \equiv 1^2 \pmod{53} \Rightarrow 45^{104} \equiv 1 \pmod{53}$

$45^2 \times 45^{104} \equiv 45^2 \pmod{53}$  et puisque  $45^2 \equiv 11 \pmod{53}$  alors  $45^{106} \equiv 11 \pmod{53}$

Alors 11 est le reste de  $45^{106}$  modulo 53

3) Soit  $N = 1 + 45 + 45^2 + \dots + 45^{105} = \sum_{k=0}^{105} 45^k$

a)  $N$  est la somme de 106 termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1

et de raison 45 alors  $N = \frac{1 - 45^{106}}{1 - 45} = \frac{45^{106} - 1}{44} \Rightarrow 44N = 45^{106} - 1$  et puisque

$45^{106} \equiv 11 \pmod{53}$  alors  $45^{106} - 1 \equiv 10 \pmod{53} \Rightarrow 44N \equiv 10 \pmod{53}$

b)  $44N \equiv 10 \pmod{53} \Rightarrow 47 \times 44N \equiv 470 \pmod{53}$

Or  $47 \times 44 \equiv 1 \pmod{53} \Rightarrow 44 \times 47 = 1 + 53n$  où  $n \in \mathbb{Z}$  alors  $(53n + 1)N \equiv 470 \pmod{53}$

$\Rightarrow 53n.N + N \equiv 470 \pmod{53} \Rightarrow N \equiv 470 \pmod{53}$  car  $\Rightarrow 53n.N \equiv 0 \pmod{53}$  et puisque

$470 \equiv 46 \pmod{53}$  alors  $N \equiv 46 \pmod{53}$  donc 46 est le reste de  $N$  modulo 53

## Correction de l'exercice 02

- 1) a) On a :  $\sqrt{503} \approx 22,42$  et les nombres premiers qui sont inférieurs à  $\sqrt{503}$  sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 et 19 et aucun de ces nombre divise 503 alors 503 est un nombre premier
- b)  $\left. \begin{array}{l} 503 \text{ est un nombre premier} \\ 503 \wedge 7 = 1 \end{array} \right\} \text{ alors d'après Fermat } 7^{503-1} \equiv 1 \pmod{53} \Rightarrow 7^{502} \equiv 1 \pmod{503}$
- Ainsi  $7^{502} \equiv 1 \pmod{503} \Rightarrow (7^{502})^4 \equiv 1^4 \pmod{503} \Rightarrow 7^{2008} \equiv 1 \pmod{503}$
- 2) Considérons dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $49x - 6y = 1$
- On  $49 \times 1 - 6 \times 8 = 49 - 48 = 1 \Rightarrow (1; 8)$  est une solution de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $(x; y)$  est une solution de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow 49x - 6y = 49 \times 1 - 6 \times 8$
- $$\Rightarrow 49(x-1) = 6(y-8) \Rightarrow \begin{cases} 6 \text{ divise } 49(x-1) \\ 49(x-1) = 6 \times (y-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \text{ divise } (x-1) \text{ car } 6 \wedge 49 = 1 \\ 49(x-1) = 6 \times (y-8) \end{cases}$$
- $$\Rightarrow \begin{cases} x = 6k + 1 ; k \in \mathbb{Z} \\ 49(x-1) = 6 \times (y-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6k + 1 ; k \in \mathbb{Z} \\ 49 \times 6k = 6 \times (y-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6k + 1 ; k \in \mathbb{Z} \\ y = 49k + 8 \end{cases}$$
- Réciproquement :  $\forall k \in \mathbb{Z}, 49 \times (6k + 1) - 6 \times (49k + 8) = 49 - 48 = 1$
- Donc  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(6k + 1; 49k + 8) ; k \in \mathbb{Z}\}$
- 3) Soit  $n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$
- a) n est la somme de 2008 termes consécutifs d'une suite géométriques de premier terme 1 et de raison 7 alors  $n = \frac{7^{2008} - 1}{6}$
- Ainsi  $49 \times 7^{2006} - 6n = 7^2 \times 7^{2006} - (7^{2008} - 1) = 7^{2008} - 7^{2008} + 1 = 1$
- Alors le couple  $(7^{2006}; n)$  est une solution de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- b)  $n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007} = (1 + 7) + (7^2 + 7^3) + \dots + (7^{2006} + 7^{2007})$
- $$= (1 + 7) + 7^2 \times (1 + 7) + \dots + 7^{2006} \times (1 + 7) = 8 + 8 \times 7^2 + 8 \times 7^4 + \dots + 8 \times 7^{2006}$$
- $$= 8(1 + 7^2 + 7^4 + \dots + 7^{2006}) = 4 \times 2 \times (1 + 7^2 + 7^4 + \dots + 7^{2006}) \Rightarrow 4 \text{ divise } n.$$
- Donc  $n \equiv 0 \pmod{4}$
- En plus  $6n = 7^{2008} - 1 \equiv 0 \pmod{503}$  car  $7^{2008} \equiv 1 \pmod{503} \Rightarrow 503$  divise  $6n$  et puisque  $503 \wedge 6 = 1$  alors d'après Gauss  $503$  divise  $n \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{503}$
- $\left. \begin{array}{l} n \equiv 0 \pmod{4} \\ n \equiv 0 \pmod{503} \end{array} \right\} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{4 \times 503} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{2012}.$
- c) On a  $\left. \begin{array}{l} n \equiv 0 \pmod{503} \\ 503 \wedge 4 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{4 \times 503} \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{2012}.$
- Donc n est divisible par 2012

## Correction de l'exercice 03

Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul

On pose  $S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$

- 1) a) S est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $p \neq 1$  et de

premier terme 1 Alors :  $S = \frac{1 - p^n}{1 - p}$

b) On a :  $S = \frac{1-p^n}{1-p} \Rightarrow p^n + (1-p)S = 1$  alors d'après Bézout  $p^n$  et  $(1-p)$  sont premiers entre eux

2) a) Soit, dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , l'équation (E) :  $p^n x - (1-p)y = p$

On a :  $\Rightarrow p^n + (1-p)S = 1 \Rightarrow p^n \times p - (1-p)(-pS) = p$

Alors  $(p; -pS)$  est une solution particulière de l'équation (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Si  $(x; y)$  est une solution de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  alors  $p^n x - (1-p)y = p$

Et puisque  $p^n \times p - (1-p)(-pS) = p$

Alors  $p^n x - (1-p)y = p^n \times p - (1-p)(-pS) \Rightarrow p^n(x-p) = (1-p)(y+pS)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-p) \text{ divise } p^n(x-p) \\ p^n(x-p) = (1-p)(y+pS) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-p) \text{ divise } (x-p) \text{ car } p^n \wedge (1-p) = 1 \\ p^n(x-p) = (1-p)(y+pS) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (1-p)k + p; k \in \mathbb{Z} \\ p^n(1-p)k = (1-p)(y+pS) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (1-p)k + p; k \in \mathbb{Z} \\ y = p^n k - pS \end{cases}$$

Réciproquement :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, p^n((1-p)k + p) - (1-p)(p^n k - pS) = p^n k - p^{n+1}k + p^{n+1} - p^n k + pS + p^{n+1}k - p^2S \\ = p^{n+1} + pS - p^2S = p(p^n + (1-p)S) = p$$

Donc  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(1-p)k + p; p^n k - pS; k \in \mathbb{Z}\}$

b) Soit, dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , l'équation (F) :  $10^n x + 2^{n+2}y - 10 \cdot 2^{n-1} = 0$  où  $n \in \mathbb{N}^*$

$(x, y)$  est solution de (F) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $\Leftrightarrow 10^n x + 2^{n+2}y - 10 \cdot 2^{n-1} = 0 \Leftrightarrow 2^n \cdot 5^n x + 2^{n+2}y = 5 \cdot 2^n$

$\Leftrightarrow 5^n x + 4y = 5 \Leftrightarrow 5^n x - (1-5)y = 5 \Leftrightarrow p^n x - (1-p)y = p$  avec  $p = 5$

Donc  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}^F = \{(5 - 4k; 5^n k - 5(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1})) ; k \in \mathbb{Z}\}$

### Correction de l'exercice 04

1) On a :  $\sqrt{101} \approx 10,05$  donc les nombres premiers inférieurs à  $\sqrt{101}$  sont 2, 3, 5 et 7 et aucun d'eux ne divise 101 Alors 101 est un nombre premier

2) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $77x + 100y = 1$

a) On a :  $77 \times 13 - 10 \times 100 = 1$  alors  $(13, -10)$  est une solution de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

b)  $(x, y)$  est une solution de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow 77x + 100y = 1 \Rightarrow 77x + 100y = 77 \times 13 + 100 \times (-10)$$

$$\Rightarrow 77(x-13) = 100(-y-10) \Rightarrow \begin{cases} 100 \text{ divise } 77(x-13) \\ 77(x-13) = 100(-y-10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 100 \text{ divise } (x-13) \text{ car } 100 \wedge 77 = 1 \\ 77(x-13) = 100(-y-10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 100k + 13; k \in \mathbb{Z} \\ 77 \times 100k = 100(-y-10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 100k + 13; k \in \mathbb{Z} \\ y = -77k - 10 \end{cases}$$

Réciproquement :  $\forall k \in \mathbb{Z}, 77(100k + 13) + 100(-77k - 10) = 77 \times 13 - 10 \times 100 = 1$

Alors  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(100k + 13; -77k - 10), k \in \mathbb{Z}\}$

3) On considère dans  $\mathbb{N}$  l'équation (F) :  $x^{77} \equiv 3 \pmod{101}$

Soit  $x$  une solution de F

a) 101 est un nombre premier alors  $x \wedge 101 = 101$  ou  $x \wedge 101 = 1$

Si  $x \wedge 101 = 101 \Rightarrow 101$  divise  $x \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{101} \Rightarrow x^{77} \equiv 0 \pmod{101}$

Ce qui est impossible car  $x^{77} \equiv 3 \pmod{101}$  donc nécessairement  $x \wedge 101 = 1$

Par suite  $x$  et 101 sont premiers entre eux

Ainsi  $\left. \begin{array}{l} 101 \text{ est premier} \\ x \wedge 101 = 1 \end{array} \right\}$  alors d'après Fermat  $x^{100} \equiv 1 \pmod{101}$

b) On a :  $x^{77} \equiv 3 \pmod{101} \Rightarrow x^{77 \times 13} \equiv 3^{13} \pmod{101}$

Et puisque  $77 \times 13 - 10 \times 100 = 1$  alors  $77 \times 13 = 100 \times 10 + 1$

Donc  $x^{100 \times 10 + 1} \equiv 3^{13} \pmod{101} \Rightarrow 3^{13} \equiv x^{100 \times 10 + 1} \pmod{101}$

Et comme  $x^{100} \equiv 1 \pmod{101}$  alors  $x^{100 \times 10} \equiv 1 \pmod{101} \Rightarrow x^{100 \times 10 + 1} \equiv x \pmod{101}$

Alors  $3^{13} \equiv x \pmod{101} \Rightarrow x \equiv 3^{13} \pmod{101}$

4) Soit  $x$  un entier naturel

Si  $x \equiv 3^{13} \pmod{101} \Rightarrow x^{77} \equiv 3^{13 \times 77} \pmod{101} \Rightarrow x^{77} \equiv 3^{100 \times 10 + 1} \pmod{101}$

$\Rightarrow x^{77} \equiv 3 \cdot (3^{100})^{10} \pmod{101}$

Et puisque  $\left. \begin{array}{l} 101 \text{ est premier} \\ 101 \wedge 3 = 1 \end{array} \right\}$  alors d'après Fermat  $3^{100} \equiv 1 \pmod{101}$

Donc  $(3^{100})^{10} \equiv 1 \pmod{101} \Rightarrow 3 \cdot (3^{100})^{10} \equiv 3 \pmod{101}$  par suite  $x^{77} \equiv 3 \pmod{101}$

Alors  $x$  est une solution de (F)

5) D'après 3) si  $x$  est une solution de (F) alors  $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$

D'après 4) si  $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$  alors  $x$  est une solution de (F)

$x \in \mathbb{N}$ ,  $x$  solution de (F)  $\Leftrightarrow x \equiv 3^{13} \pmod{101}$  et comme  $3^{13} = 15785 \times 101 + 38$

alors  $3^{13} \equiv 38 \pmod{101}$

Donc  $x$  solution de (F), dans  $\mathbb{N}$ ,  $\Leftrightarrow x \equiv 38 \pmod{101} \Leftrightarrow x = 101k + 38 ; k \in \mathbb{N}$  car  $x \in \mathbb{N}$

