Mathématiques 4ème Maths	DEVOIR DE CONTRÔLE N° 01 Durée : 2 heures	Professeur : Elabidi Zahi

Exercice 01 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos \pi x}{\pi^2x^2}-x & \text{si } x>0\\ \sqrt{x^2+x+1}-x-\dfrac{1}{2} & \text{si } x\le 0\end{cases}$

1) a) Montrer que $\forall\ x>0\ ,-x\le f(x)\le -x+\dfrac{2}{\pi^2x^2}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(\tan x)$

2) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)$

3) a) Montrer que la droite d'équation $y=-2x-1$ est une asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} x f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right[$

b) Montrer que $\sin(\pi\alpha)=\pi\alpha\sqrt{2\alpha-\pi^2\alpha^4}$

Exercice 02 : (6 points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-2z+2=0$

b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle

2) Pour tout réel θ de l'intervalle $]0;\pi[$, on considère l'équation $(E_\theta): z^2-2z-2i\sin\theta.e^{i\theta}=0$

a) Vérifier que $e^{i2\theta}-1=2i\sin\theta.e^{i\theta}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

3) Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ On désigne par M_0, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_0=2$, $z_1=1-e^{i\theta}$ et $z_2=1+e^{i\theta}$

a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle

b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0M_2}$ sont orthogonaux

c) Montrer que $OM_1M_0M_2$ est un rectangle

d) Déterminer θ pour que $OM_1M_0M_2$ soit un carré

4) Déterminer les ensembles décrits par M_1 et M_2 lorsque θ varie dans $]0;\pi[$

Exercice 03 : (7 points)

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et i

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{\overline{z}}$

1) Montrer que f n'admet aucun point invariant

2) Déterminer l'ensemble des antécédents par f du point A

3) a) Montrer que pour tout point M de $\mathscr{P} \setminus \{O, B\}$, on a : $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{BM}})[2\pi]$

   b) En déduire l'ensemble des points M pour lesquels les point O, M et M' sont alignés

4) a) Montrer que pour tout point M de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux

   b) En déduire une construction du point M' à partir d'un point M donné n'appartenant pas à (OB).

   c) Effectuer la construction de l'image du point C d'affixe $z_c = 1 + i(1+\sqrt{3})$

5) Déterminer l'image par f de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$

Correction

Exercice 01

1) a) On a : $\forall\ x>0\ ,-1\le -\cos(\pi x)\le 1 \Rightarrow 0\le 1-\cos(\pi x)\le 2 \Rightarrow 0\le \dfrac{1-\cos(\pi x)}{\pi^2x^2}\le \dfrac{2}{\pi^2x^2}$

Donc $\forall\ x>0,\ -x\le \dfrac{1-\cos(\pi x)}{\pi^2x^2}-x\le -x+\dfrac{2}{\pi^2x^2} \Rightarrow \forall x>0,\ -x\le f(x)\le -x+\dfrac{2}{\pi^2x^2}$

b) On a : $\begin{cases}\forall\ x>0,\ f(x)\le -x+\dfrac{2}{\pi^2x^2}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\dfrac{2}{\pi^2x^2}\right)=-\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Ainsi $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(\tan x)=-\infty$

2) a) • La fonction $x\mapsto x^2+x+1$ est continue et positive sur $]-\infty;0]$

Alors la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+x+1}$ est continue sur $]-\infty;0]$

La fonction $x\mapsto -x-\dfrac{1}{2}$ est continue sur $]-\infty;0]$

Donc la fonction f est continue sur $]-\infty;0]$ (Somme de deux fonctions continues)

• Les fonctions $x\mapsto 1-\cos(\pi x)$ et $x\mapsto\pi^2x^2$ sont continues sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0\ ,\ \pi^2x^2\ne 0$

Alors la fonction $x\mapsto\dfrac{1-\cos(\pi x)}{\pi^2x^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$

La fonction $x\mapsto -x$ est continue sur $]0;+\infty[$

Donc la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ (Somme de deux fonctions continues)

• $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1-\cos(\pi x)}{\pi^2x^2}-x\right)=\dfrac{1}{2}=f(0)$ $\left(\text{car}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos(\pi x)}{\pi^2x^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1-\cos t}{t^2}=\dfrac{1}{2}\right)$

Alors f est continue à droite en 0

<u>Conclusion</u> : f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $]0;+\infty[$ et à droite en 0

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$

b) on a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)=\dfrac{1}{2}$

3) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x+1=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x+\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}=0$$

Alors la droite d'équation $y=-2x-1$ est une asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to -\infty} \frac{f(t)}{t} = -2$

(Car la droite d'équation $y = -2x - 1$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$)

4) a) f est continue sur $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ et $f\left(\frac{1}{3}\right).f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2\pi^2} - \frac{1}{3}\right).\left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{2}\right) < 0$

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[$

b) On a: $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{1-\cos(\pi\alpha)}{\pi^2\alpha^2} = \alpha \Rightarrow 1 - \cos(\pi\alpha) = \pi^2\alpha^3 \Rightarrow \cos(\pi\alpha) = 1 - \pi^2\alpha^3$

Or $\sin^2(\pi\alpha) + \cos^2(\pi\alpha) = 1$ alors $\sin^2(\pi\alpha) = 1 - \cos^2(\pi\alpha) \Rightarrow |\sin(\pi\alpha)| = \sqrt{1-\cos^2(\pi\alpha)}$

Donc $|\sin(\pi\alpha)| = \sqrt{1-\left(1-\pi^2\alpha^3\right)^2} = \sqrt{2\pi^2\alpha^3 - \pi^4\alpha^6} = \sqrt{\pi^2\alpha^2(2\alpha - \pi^2\alpha^4)} = \pi|\alpha|\sqrt{2\alpha - \pi^2\alpha^4}$

Et puis que $\alpha \in \left]\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[$ alors $\pi\alpha \in \left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \sin(\pi\alpha) > 0$

Donc $\sin(\pi\alpha) = \pi\alpha\sqrt{2\alpha - \pi^2\alpha^4}$

Exercice 02

1) a) $(E): z^2 - 2z + 2 = 0$

Le discriminant de (E) est $\Delta = -4 = (2i)^2$ alors les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont :

$z' = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$ et $z'' = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$ D'où $S_{\mathbb{C}} = \{1+i\,;1-i\}$

b) $z' = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z'' = 1 - i = \overline{z}' = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) $(E_\theta): z^2 - 2z - 2i\sin\theta.e^{i\theta} = 0$ où $\theta \in]0;\pi[$

a) $e^{i2\theta} - 1 = e^{i\theta}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = 2i\sin\theta.e^{i\theta}$ (Formule d'Euler)

b) Le discriminant de (E_θ) est $\Delta_\theta = 4 + 4\times 2i\sin\theta e^{i\theta} = 4 + 4\left(e^{i2\theta} - 1\right) = 4e^{i2\theta} = \left(2e^{i\theta}\right)^2$

Alors les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E_θ) sont :

$z_1 = \frac{2-2e^{i\theta}}{2} = 1 - e^{i\theta}$ et $z_2 = \frac{2+2e^{i\theta}}{2} = 1 + e^{i\theta}$ D'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{1-e^{i\theta}\,;1+e^{i\theta}\right\}$

3) a) $z_1 = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$

$z_2 = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$

Et comme $\theta \in]0;\pi[$ alors $\frac{\theta}{2} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\frac{\theta}{2} > 0$ et $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ alors la forme exponentielle de z_1 est $2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$ et celle de z_2 est $2\cos\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$

b) On a : $\frac{z_{\overrightarrow{M_0M_1}}}{z_{\overrightarrow{M_0M_2}}} = \frac{z_1-2}{z_2-2} = \frac{-1-e^{i\theta}}{e^{i\theta}-1} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}}{-2i\sin.e^{i\frac{\theta}{2}}} = i\cot g\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\frac{z_{\overrightarrow{M_0M_1}}}{z_{\overrightarrow{M_0M_2}}}$ est imaginaire alors les vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0M_2}$ sont orthogonaux

c) $z_{\overrightarrow{M_2M_0}} = 2 - z_2 = 1 - e^{i\theta} = z_1 = z_{\overrightarrow{OM_1}}$ alors $\overrightarrow{M_2M_0} = \overrightarrow{OM_1}$

Donc $OM_1M_0M_2$ est un parallélogramme

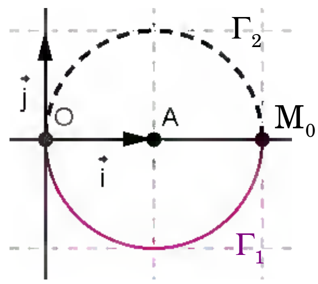
Ainsi $\left.\begin{array}{l} OM_1M_0M_2 \text{ est un parallélogramme} \\ \overrightarrow{M_0M_1} \perp \overrightarrow{M_0M_2} \end{array}\right\} \Rightarrow OM_1M_0M_2$ est rectangle

d) On a : $OM_1M_0M_2$ est rectangle donc pour qu'il soit un carré il suffit que $OM_1 = OM_2$

$OM_1 = OM_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \Rightarrow 2\sin\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$

Or $\frac{\theta}{2} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

4) Soit Γ_1 et Γ_2 les ensembles décrits par M_1 et M_2 lorsque θ varie dans $]0;\pi[$ respectivement et soit A le point d'affixe 1



- $M(z_1) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 - e^{i\theta} \\ \theta \in]0;\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_A = e^{i(\theta+\pi)} \\ \theta \in]0;\pi[\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_1 - z_A| = 1 \\ \arg(z_1 - z_A) \equiv \theta + \pi[2\pi], \theta \in]0;\pi[\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} AM_1 = 1 \\ (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{AM_1}}) \equiv \theta + \pi[2\pi], \theta \in]0;\pi[\end{cases}$

Donc Γ_1 est l'arc $\widehat{OM_0}$ du cercle de centre A et de rayon 1 privé de O et M_0

- $M(z_2) \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 1 + e^{i\theta} \\ \theta \in]0;\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_A = e^{i\theta} \\ \theta \in]0;\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2 - z_A| = 1 \\ \arg(z_2 - z_A) \equiv \theta[2\pi], \theta \in]0;\pi[\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} AM_2 = 1 \\ (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{AM_2}}) \equiv \theta[2\pi], \theta \in]0;\pi[\end{cases}$

Donc Γ_2 est l'arc $\widehat{M_0O}$ du cercle de centre A et de rayon 1 privé de O et M_0

Exercice 03

1) Soit $z = x + iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

M(z) est un point invariant par f $\Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{z-i}{\overline{z}} \\ z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\overline{z} = z - i \\ z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 - z + i = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - x - i(y-1) = 0 \\ (x;y) \neq (0;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ y - 1 = 0 \\ (x;y) \neq (0;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ y = 1 \\ (x;y) \neq (0;0) \end{cases}$

Et comme l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle alors le système

$\begin{cases} z = \dfrac{z-i}{\overline{z}} \\ z \neq 0 \end{cases}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{C}$ donc f n'admet aucun point invariant

2) Soit Δ l'ensemble des antécédents de A par f

$$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z-i}{\overline{z}} = 1 \\ z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - i = \overline{z} \\ z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - \overline{z} - i = 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2i\,\mathrm{Im}(z) - i = 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,\mathrm{Im}(z) - 1 = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

Soit $z = x + iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ donc $M(z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ (x;y) \neq (0;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Alors Δ est la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$

3) a) On a $\forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \{i\}$,$z' = \dfrac{z-i}{\overline{z}} \Rightarrow \arg(z') \equiv \arg\left(\dfrac{z-i}{\overline{z}}\right)[2\pi] \equiv \arg(z-i) - \arg(\overline{z})[2\pi]$

$$\equiv \arg(z-i) + \arg(z)[2\pi]$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM'}}) \equiv (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BM}}) + (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})[2\pi] \Rightarrow (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM'}}) - (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}}) \equiv (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BM}})[2\pi]$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM'}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM},\vec{i}}) \equiv (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BM}})[2\pi] \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) \equiv (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BM}})[2\pi]$$

b) On a pour tout M de $\mathscr{P} \setminus \{O,B\}$, $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) \equiv (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BM}})[2\pi]$

Donc pour tout M de $\mathscr{P} \setminus \{O,B\}$, O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) \equiv 0[\pi]$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BM}}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow M \in$ à la droite d'équation $y = 1$ privé de B

En plus $f(B) = O \Rightarrow O, M$ et M' sont alignés si $M = B$

Par suite l'ensemble des points M pour lesquels les points O, M et M' sont alignés est la droite d'équation $y = 1$

4) a) $\forall M \in \mathscr{P} \setminus \{O\}$, $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{OM}}} = \dfrac{z'-1}{z} = \dfrac{\dfrac{z-i}{\overline{z}} - 1}{z} = \dfrac{z - i - \overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{2i\,\mathrm{Im}(z) - i}{|z|^2} = i\left(\dfrac{2\,\mathrm{Im}(z) - 1}{|z|^2}\right)$

Ainsi $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{OM}}}$ est imaginaire car $\left(\dfrac{2\,\mathrm{Im}(z) - 1}{|z|^2}\right) \in \mathbb{R}$ alors $\overrightarrow{AM'} \perp \overrightarrow{OM}$

b) Soit M un point de $\mathscr{P} \setminus (OB)$ d'image M' par f

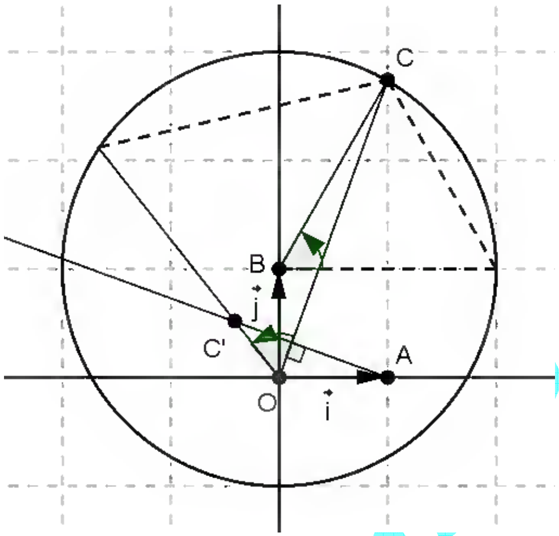
On $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) \equiv (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BM}})[2\pi]$ et $\overrightarrow{AM'} \perp \overrightarrow{OM}$ alors M' appartient à la perpendiculaire à (OM) passant par A et à la demi droite $[Ot)$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{Ot}}) \equiv (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BM}})[2\pi]$

c) $z_C = 1 + i(1+\sqrt{3}) = 1 + i + i\sqrt{3} \Leftrightarrow z_C - i = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow z_C - z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_C - z_B| = 2 \\ \arg(z_C - z_B) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BC = 2 \\ (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{BC}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

Alors C est un point du cercle de centre B et de rayon 2 et de la demi droite $[Bt')$ tel que $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{Bt'}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

Alors $C' = f(C)$ appartient à la perpendiculaire à (OC) passant par A et à la demi droite $[Ot)$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{Ot}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$



5) Soit Γ l'image par f de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$

$M(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow z = x + i$ où $x \in \mathbb{R}$

Soit $z' = x' + iy'$ où $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ l'affixe de $M' = f(M)$

$$z' = \frac{z - i}{\overline{z}} = \frac{x}{x - i} = \frac{x(x + i)}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} + i\frac{x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x^2}{x^2 + 1} \\ y' = \dfrac{x}{x^2 + 1} \end{cases}$$

Ainsi $x'^2 + y'^2 = \frac{x^4}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2}{x^2 + 1} = x'$

Donc $x'^2 + y'^2 = x' \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - x' = 0 \Leftrightarrow \left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 + y'^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow M'$ appartient au cercle de centre $O'\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Alors Γ est le cercle de centre $O'\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$