ISOMÉTRIES DU PLAN

I - DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1) Définition

Définition

Une application f du plan dans lui-même est une isométrie si et seulement si elle conserve les distances
C'est-à-dire, pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N' par f, on a : $MN = M'N'$

Conséquences

- L'identité du plan, les translations, les symétries orthogonales et les rotations sont des isométries
- Les images de deux points distincts du plan par une isométrie sont deux points distincts (on dit qu'une isométrie est injective)

Exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$
On considère l'application g du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z$

1) Montrer que g est isométrie
2) Montrer que g est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques

Solution

On a $z' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$

1) Soient $M(z_1)$ et $N(z_2)$ deux points d'images respectives $M'(z_1')$ et $N'(z_2')$ par g

On a : $M'N' = |z_2' - z_1'| = \left|e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_2 - z_1)\right| = \left|e^{i\frac{2\pi}{3}}\right||(z_2 - z_1)| = |(z_2 - z_1)| = MN$ alors g est une isométrie

2) On a pour $z = 0$, $z' = 0 \Rightarrow g(O) = O$
Soit $M(z)$ un point distinct de O d'image $M'(z')$ par g alors :

$$g(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'}{z}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow M' = r(M)$$

Où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ donc $g = r_{(O,\frac{2\pi}{3})}$

2) Isométries et produit scalaire

Théorème

Une application f du plan dans lui-même est une isométrie, si et seulement si, elle conserve le produit scalaire
C'est-à-dire f est une isométrie, si et seulement si, pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C' par f on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$

Démonstration

Soient A, B et C trois points quelconques du plan d'images respectives A', B' et C' par f

• Supposons que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$

Pour $B = C$ on a : $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{A'B'}^2 \Rightarrow AB^2 = A'B'^2 \Rightarrow AB = A'B'$ donc f est une isométrie du plan

• Réciproquement, supposons que f est une isométrie du plan

f conserve la distance, donc $BC = B'C'$

$$BC = B'C' \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{B'C'}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}^2 + \overrightarrow{A'B'}^2 - 2\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$$

Comme $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{A'C'}^2$ et $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{A'B'}^2$ on obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$

Corollaire

> Soit f une isométrie du plan
> Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts d'images respectives A', B' et C' par f alors $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$
> On dit qu'une isométrie conserve les mesures des angles géométriques

Démonstration

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos\widehat{BAC}$ et $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = A'B'.A'C'\cos\widehat{B'A'C'}$

Et puisque f est une isométrie alors $\cos\widehat{BAC} = \cos\widehat{B'A'C'}$ et comme $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ appartiennent à $[0, \pi]$ donc $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

Conséquences

> Les images par une isométrie de trois points non alignés sont trois points non alignés

Théorème

> Soit f une isométrie du plan, A, B et C trois points non alignés du plan d'images respectives A', B' et C' par f
> Si le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est orthonormé alors le repère $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ est orthonormé
> De plus pour tout point M d'image M'
> $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x et y réels, implique $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$

Démonstration

• Soit $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ un repère orthonormé

L'application f étant une isométrie, il résulte que

$\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$, $\left\|\overrightarrow{A'C'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 1$ et $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ donc le repère $(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ est orthonormé

• Soit M un point tel que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x et y sont des réels

Les égalités $x = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$ et $y = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$ impliquent, par conservation du produit scalaire, que $x = \overrightarrow{A'M'}.\overrightarrow{A'B'}$ et $y = \overrightarrow{A'M'}.\overrightarrow{A'C'}$ d'où $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$

3) Isométrie réciproque

Théorème et définition

> Une isométrie f est une bijection du plan dans lui-même
> L'application du plan dans lui-même qui à tout point N du plan associe son unique antécédent M par f est une isométrie appelée réciproque de f et notée f^{-1}

Démonstration

Soit f une isométrie du plan $\mathscr{P}$, $R=(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ un repère orthonormé de $\mathscr{P}$ et $R'=(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ son image par f

Pour tout point M' de couple de coordonnées (x,y) dans R' il existe un unique point M de couple de coordonnée (x,y) dans R tel que $f(M)=M'$ donc f est bijective

Pour tout couple (M,N) de points de $\mathscr{P}$ il existe un unique couple (M',N') tel que $f(M)=M'$ et $f(N)=N'$

On a : $f^{-1}(M')=M$ et $f^{-1}(N')=N$ et comme f est une isométrie de $\mathscr{P}$ on a $M'N'=MN$ ou encore $MN=M'N'$ ce qui prouve que f^{-1} est une isométrie

Il résulte du théorème précédent que :

- Pour toute isométrie f et tout point M, $f(M)=N \Leftrightarrow f^{-1}(N)=M$
- La réciproque d'une symétrie orthogonale est elle-même
- La réciproque d'une symétrie centrale est elle-même
- La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$
- La réciproque d'une rotation de centre I et d'angle θ est la rotation de centre I et d'angle $-\theta$

4) Isométries et configurations

Soit f une isométrie du plan muni d'un repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

Soit $(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ l'image de $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ par f

Soit P,Q,R,S,M et N des points d'images respectives P',Q',R',S',M' et N' par f

Supposons que $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{RS}$ où a et b sont des réels

Si $\overrightarrow{PQ}=\alpha_1\overrightarrow{AB}+\beta_1\overrightarrow{AC}$ où α_1 et β_1 sont des réels alors $\overrightarrow{P'Q'}=\alpha_1\overrightarrow{A'B'}+\beta_1\overrightarrow{A'C'}$

Si $\overrightarrow{RS}=\alpha_2\overrightarrow{AB}+\beta_2\overrightarrow{AC}$ où α_2 et β_2 sont des réels alors $\overrightarrow{R'S'}=\alpha_2\overrightarrow{A'B'}+\beta_2\overrightarrow{A'C'}$ donc :

$\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{RS}=(a\alpha_1+b\alpha_2)\overrightarrow{AB}+(a\beta_1+b\beta_2)\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M'N'}=(a\alpha_1+b\alpha_2)\overrightarrow{A'B'}+(a\beta_1+b\beta_2)\overrightarrow{A'C'}=a(\alpha_1\overrightarrow{A'B'}+\beta_1\overrightarrow{A'C'})+b(\alpha_2\overrightarrow{A'B'}+\beta_2\overrightarrow{A'C'})$$
$$=a\overrightarrow{P'Q'}+b\overrightarrow{R'S'}$$

Théorème

Soit f une isométrie A,B,C et D des points du plan d'images respectives A',B',C' et D' par f .Si $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$

Action d'une isométrie sur les configurations usuelles

- Une isométrie conserve le barycentre deux points .En particulier une isométrie conserve le milieu d'un segment
- L'image d'une droite par une isométrie est une droite
- L'image d'un segment par une isométrie est un segment qui lui est isométrique
- Les images de deux droites parallèles par une isométrie sont deux droites parallèles (on dit qu'une isométrie conserve le parallélisme)
- L'image d'un parallélogramme par une isométrie est un parallélogramme
- Les images de deux droites perpendiculaires par une isométrie sont deux droites perpendiculaires (on dit qu'une isométrie conserve l'orthogonalité)
- L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle qui lui est isométrique
- L'image par une isométrie de la tangente en point M à un cercle est la tangente au cercle image au point M' image de M (on dit qu'une isométrie conserve le contact)

II - COMPOSITION D'ISOMÉTRIE

Définition

Soient f et g deux applications du plan dans lui-même
L'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point $g(f(M))$ est appelée la composée de f et g .On la note $g \circ f$

Théorème

La composée de deux isométrie est une isométrie

Démonstration

Soient f et g deux isométries du plan et M et N deux points du plan
On désigne par : $M' = f(M)$, $N' = f(N)$, $M'' = g(M')$ et $N'' = g(N')$
Alors on a : $g \circ f(M) = M''$ et $g \circ f(N) = N''$

et $\begin{cases} M'N' = MN \\ M''N'' = M'N' \end{cases} \Rightarrow M''N'' = MN \Rightarrow g \circ f$ est une isométrie

1) Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants

Théorème

La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation
Plus précisément, si D et D' sont deux droites sécantes en un point I et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et si S_D et $S_{D'}$ sont les symétries orthogonales d'axes respectifs D et D' alors $S_{D'} \circ S_D$ est la rotation de centre I et d'angle θ où $\theta \equiv 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]$

Démonstration

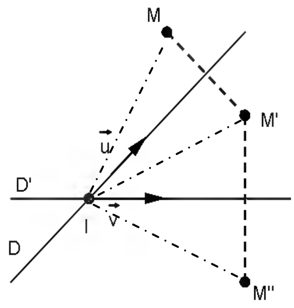
Soit D et D' deux droites sécantes en un point I et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
Considérons un point M distinct de I et posons $M' = S_D(M)$ et $M'' = S_{D'}(M')$ alors :

$S_{D'} \circ S_D(I) = S_{D'}(I) = I$

S_D et $S_{D'}$ étant des isométries : Alors $IM' = IM$ et $IM'' = IM' \Rightarrow IM'' = IM$

- $\begin{cases} S_D(M) = M' \\ S_D(I) = I \end{cases} \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}}) \equiv 2(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IM'}})[2\pi]$ et $\begin{cases} S_{D'}(M') = M'' \\ S_{D'}(I) = I \end{cases} \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{IM'},\overrightarrow{IM''}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{IM'},\vec{v}})[2\pi]$

Donc
$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM''}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}}) + (\widehat{\overrightarrow{IM'},\overrightarrow{IM''}})[2\pi] \\ &\equiv 2(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IM'}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{IM'},\vec{v}})[2\pi] \\ &\equiv 2((\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IM'}}) + (\widehat{\overrightarrow{IM'},\vec{v}}))[2\pi] \\ &\equiv 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]\end{aligned}$$



Par suite $\begin{cases} S_{D'} \circ S_D(M) = M'' \\ S_{D'} \circ S_D(I) = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IM'' = IM \\ (\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM''}}) \equiv 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow M'' = r\ (M)$ où r est la rotation de centre I et d'angle θ tel que $\theta \equiv 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]$ donc $S_{D'} \circ S_D$ et la rotation de centre I et d'angle θ tel que $\theta \equiv 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]$

Conséquence

La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires D et D' en I est la symétrie centrale de centre I et dans ce cas : $S_D \circ S_{D'} = S_{D'} \circ S_D$

2) Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Théorème

La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation
Plus précisément, si D et D' sont deux droites parallèles et si S_D et $S_{D'}$ sont les symétries orthogonales d'axes respectifs D et D' alors $S_{D'} \circ S_D$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$, où I est un point de D et J est le projeté orthogonal de I sur D'

Démonstration

Soit D et D' deux droites parallèles et M un point du plan

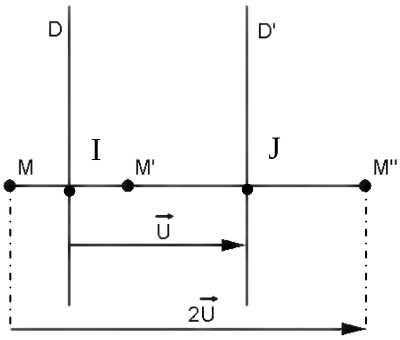
Soient $M' = S_D(M)$, $M'' = S_{D'}(M')$; I et J les milieux respectifs de $[MM']$ et $[M'M'']$

Alors : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'}\\ \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'J}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{IJ}$

$\Rightarrow M'' = t_{2\vec{u}}(M)$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{IJ}$

Donc $S_{D'} \circ S_D(M) = M'' \Leftrightarrow t_{2\overrightarrow{IJ}}(M) = M''$

$\Rightarrow S_{D'} \circ S_D = t_{2\overrightarrow{IJ}} = t_{2\vec{u}}$



Théorème

Soit f et g deux isométries.
$g = f^{-1}$, si et seulement si, $f \circ g = Id$, où Id désigne l'identité du plan

Démonstration

Supposons que g est l'isométrie réciproque de f .Alors pour tout point M du plan,
$f(M) = N \Leftrightarrow g(N) = M$

Considérons un point M du plan et désignons par N son image par f .Alors :
$f \circ g(N) = f(M) = N \Rightarrow f \circ g = Id$

Réciproquement, supposons que $f \circ g = Id$

Si N est un point du plan tel que $g(N) = M$ alors d'après l'hypothèse

$f \circ g(N) = f(M) = N \Rightarrow g = f^{-1}$

Propriété 01

Si f et g sont deux isométries, alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Démonstration

On sait que $g \circ g^{-1} = Id$ et $f \circ f^{-1} = Id$

Alors $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = Id$ ce qui équivaut à $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Propriété 02

Soient f, g et h trois isométries. $f = g$, si et seulement si $h \circ f = h \circ g$

Démonstration

Pour tout point M, l'égalité $f(M) = g(M) \Rightarrow h(f(M)) = h(g(M)) \Rightarrow h \circ f = h \circ g$

Réciproquement, supposons que $h \circ f = h \circ g$ alors :

$h^{-1} \circ (h \circ f) = h^{-1} \circ (h \circ g) \Rightarrow (h^{-1} \circ h) \circ f = (h^{-1} \circ h) \circ g \Rightarrow f = g$

III - ISOMÉTRIES ET POINTS FIXES

1) Isométries ayant des points fixes

Théorème

Soit f une isométrie du plan, différente de l'identité et A un point non fixe de f d'image A'. Alors les points fixes de f, s'ils existent se trouvent sur la médiatrice de $[AA']$

Démonstration

Soit f une isométrie du plan, différente de l'identité et A un point non fixe de f d'image A'

Si M est un point fixe de f alors $\begin{cases} f(M) = M \\ f(A) = A' \end{cases} \Rightarrow MA = MA' \Rightarrow M \in \text{méd}[AA']$

Théorème

Une isométrie fixe trois points non alignés, si et seulement si, c'est l'identité du plan

Soit f une isométrie et A, B, et C trois points non alignés

Pour tout point M du plan on peut écrire $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

Ce qui implique que $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$, où A', B' et C' sont les images respectives des points A, B et C par f

Si les points A, B et C sont invariants par f, alors $\overrightarrow{AM'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

Il en résulte que $M = M'$

Conséquence

Si deux isométries f et g coïncident sur trois points non alignés alors elles coïncident par tout dans le plan
On dit qu'une isométrie est déterminée par la donnée de trois points non alignés et leurs images

Théorème

Si une isométrie fixe deux points A et B alors elle fixe tous les points de la droite (AB)

Démonstration

Si f est une isométrie qui fixe deux points distants A et B

Pour tout M de (AB) il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$

Alors si $M' = f(M)$ on a $\overrightarrow{AM'} = x\overrightarrow{AB}$ .On en déduit que $M' = M$

Théorème

> Si une isométrie f fixe deux points distincts A et B et si elle est différente de l'identité Alors f est la symétrie orthogonale d'axe (AB)

Démonstration

Soit f une isométrie, différente de l'identité qui fixe deux points distincts A et B

Soit M un point du plan d'image M' par f

Si $M \in (AB)$ alors $M' = M$

Si $M \notin (AB)$ alors $M' \neq M$ car une isométrie différente de l'identité ne fixe pas trois non alignés de plus les points A et B sont sur la médiatrice de $[MM']$

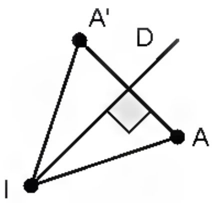
Alors f est la symétrie orthogonale d'axe (AB)

Théorème

> Si une isométrie f fixe un unique point I alors f est une rotation de centre I et d'angle non nul

Démonstration

Soit f une isométrie qui fixe un unique point I du plan et soit A un point distinct de I d'image A' par f



On note D la médiatrice de $[AA']$ et S_D la symétrie orthogonale d'axe D

Puisque I est un point fixe par f alors $I \in D$

$$\left.\begin{array}{l}(S_D \circ f)(I) = I \\ (S_D \circ f)(A) = A\end{array}\right\} \Rightarrow S_D \circ f = Id \text{ ou } S_D \circ f = S_{(AI)}$$

$S_D \circ f$ ne peut pas être l'identité du plan car f serait S_D et fixerait plus d'un point

Par conséquent $S_D \circ f = S_{(AI)}$ et par suite $f = S_D \circ S_{(AI)}$ donc f est une rotation

Exercice

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit f l'application du plan P dans P, qui à tout point $M(x, y)$ associe le point

$$M'(x', y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie de P

2) a) Montrer que f admet un seul point invariant que l'on déterminera

   b) En déduire que f est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques

Solution

1) Soit M un point d'affixe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et M' d'affixe $z' = x' + iy'$ avec $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ l'mage de M par f alors on a : $z' = x' + iy' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y\right)$

$$\Rightarrow z' = x\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + iy\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x + iy) = e^{i\frac{\pi}{4}}z$$

Soient $M(z_1)$ et $N(z_2)$ deux points d'images respectives $M'(z_1')$ et $N'(z_2')$ par f

On a : $M'N' = |z_2' - z_1'| = \left|e^{i\frac{\pi}{4}}(z_2 - z_1)\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| |(z_2 - z_1)| = |(z_2 - z_1)| = MN$ alors f est une isométrie

2) a) Soit $M(z)$ un point invariant par f alors $f(M) = M \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{4}} z \Leftrightarrow z\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Donc O est le seul pont fixe par f

b) f fixe uniquement le point O alors f est une rotation de centre O et d'angle non nul

Soit $M(z)$ un point distinct de O d'image $M'(z')$ par f alors :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow M' = r_{(O,\frac{\pi}{4})}(M)$$

Donc $f = r_{(O,\frac{\pi}{4})}$

2) Isométries sans points fixes

Théorème

Soit O un point du plan .Alors toute isométrie f se décompose de manière unique en la composée d'une translation et d'une isométrie g qui fixe O

Démonstration

Soit O' l'image de O par f et $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$ alors l'isométrie $g = t_{-\vec{u}} \circ f$ fixe le point O

Le théorème en découle

Théorème

Une isométrie qui n'aucun point fixe est soit une translation de vecteur non nul, soit la composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ

Démonstration

Soit f une isométrie sans point fixe , O un point du plan d'image O' par f

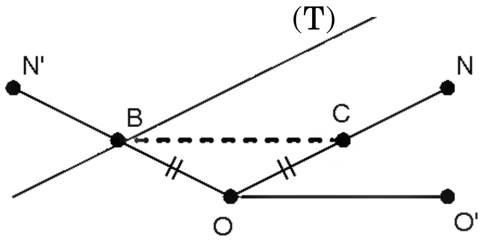
On sait qu'il existe une isométrie g qui fixe O et telle que $f = t_{\overrightarrow{OO'}} \circ g$

• Supposons que g est une rotation d'angle non nul α

Soit N un point du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{ON}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}[2\pi]$, N' son image par g

L'image (T) de la droite (ON) par la translation $t_{\overrightarrow{O'O}}$ coupe (ON') en un point B

Soit $C = g^{-1}(B)$. g est une rotation d'angle non nul qui fixe O alors O est le centre de g



$$(\widehat{\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{ON}}) + (\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{BC}})[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BC}})[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OC}})[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO}})[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)[\pi] \equiv 0[\pi] \quad \Rightarrow (BC) \parallel (OO') \Rightarrow t_{\overrightarrow{O'O}}(BC) = (BC)$$

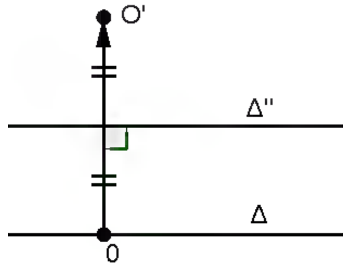
Par suite $f(C)=t_{\overrightarrow{OO'}}\circ g(C)=t_{\overrightarrow{OO'}}(B)=t_{\overrightarrow{OO'}}\big((T)\cap(BC)\big)=(ON)\cap(BC)=C\Rightarrow f$ fixe C ce qui est en contradiction avec l'hypothèse f ne fixe aucun point donc g ne peut pas être une rotation donc g est soit l'identité soit une symétrie orthogonale

- Si g est l'identité alors f est une translation
- Si g est une symétrie orthogonale d'axe Δ alors O est un point de Δ car g fixe O et donc trois cas peuvent se présenter :

1^er^ cas : Si $\overrightarrow{OO'}$ est orthogonal à Δ alors $t_{\overrightarrow{OO'}}=S_{\Delta''}\circ S_{\Delta}$ où Δ'' est la médiatrice de $[OO']$ et dans ce cas

$f=t_{\overrightarrow{OO'}}\circ S_{\Delta}=S_{\Delta''}\circ\underbrace{S_{\Delta}\circ S_{\Delta}}_{id}=S_{\Delta''}\Rightarrow f$ fixe tout point de Δ''

ce qui est absurde car f ne fixe aucun point alors $\overrightarrow{OO'}$ ne peut pas être orthogonal à Δ



2^ème^ cas : Si $\overrightarrow{OO'}$ est un vecteur directeur de Δ alors f n'admet pas de point fixe .En effet Si M est un point fixe par f et si $M_1=S_{\Delta}(M)$ on a :

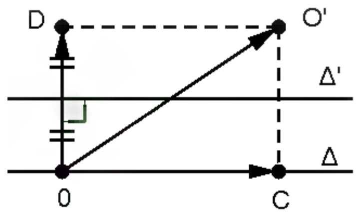
$f(M)=M\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO'}}\circ S_{\Delta}(M)=M\Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OO'}}(M_1)=M\Leftrightarrow\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{OO'}$ .Ce qui est absurde car $\overrightarrow{M_1M}$ est orthogonal à Δ

3^ème^ Cas : Si $\overrightarrow{OO'}$ n'est ni orthogonal à Δ, ni directeur de Δ on désigne par C et D les points tels que $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC}$ directeur de Δ et $\overrightarrow{OD}$ est orthogonal Δ

On a alors : alors $t_{\overrightarrow{OD}}=S_{\Delta'}\circ S_{\Delta}$ où Δ' est la médiatrice de $[OD]$ et dans ce cas

$f=t_{\overrightarrow{OO'}}\circ S_{\Delta}=t_{\overrightarrow{OC}}\circ t_{\overrightarrow{OD}}\circ S_{\Delta}=t_{\overrightarrow{OC}}\circ S_{\Delta'}\circ\underbrace{S_{\Delta}\circ S_{\Delta}}_{id}=t_{\overrightarrow{OC}}\circ S_{\Delta'}$

et comme $\overrightarrow{OC}$ est directeur de Δ' car $\Delta\parallel\Delta'$ alors d'après le 2^ème^ cas f est sans point fixe



Définition

La composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ est appelée symétrie glissante

Théorème

Toute isométrie se décompose en au plus trois symétries orthogonales

Démonstration

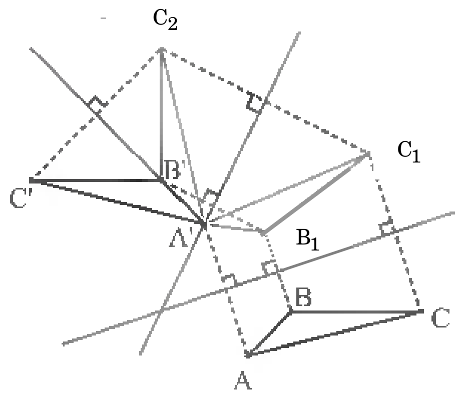
Soit f une isométrie .Soit A, B, et C trois points non alignés d'images respectives A' , B' et C' par f

On note $f_{(M,N)}=\begin{cases}\text{l'identité si } M=N\\ \text{la symétrie orthogonale transformant M en N si } M\neq N\end{cases}$

Montrons que f est la composée d'au plus trois symétries orthogonales

Notons B_1 et C_1 les images respectives de B et C par $f_{(A,A')}$ et C_2 l'image de C_1 par $f_{(B_1,B')}$

Alors $f_{(C_2,C')}$ transforme C_2 en C'

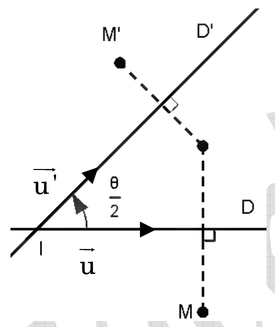


De plus, $f_{(C_2,C')} \circ f_{(B_1,B')} \circ f_{(A,A')}$ transforme les points A, B et C en A', B' et C'
il en résulte que , $f_{(C_2,C')} \circ f_{(B_1,B')} \circ f_{(A,A')} = f$

Décomposition d'une rotation

Théorème

Toute rotation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants
Plus précisément, soit r une rotation de centre I et d'angle θ et D une droite quelconque passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}$
Alors $r = S_{D'} \circ S_D$, où D' est la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u'}$ tel que $2\left(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}\right) \equiv \theta[2\pi]$



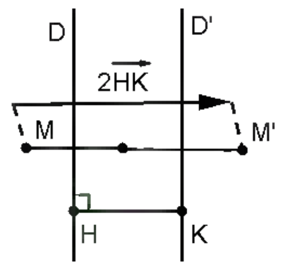
Démonstration

Soient deux droites D et D' sécantes en un point I et de vecteur directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$. Soit α une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{u'})$
Comme D et D' sont sécantes on a : $\alpha \not\equiv 0[\pi]$, alors on a : $S_{D'} \circ S_D = r_{(I,2\alpha)}$
Réciproquement : Soit la rotation de centre I et d'angle θ et une droite D passant par I de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit D' la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u'}$ telle que $\left(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}\right) \equiv \frac{\theta}{2}[\pi]$ on a alors : $r_{(I,\theta)} = S_{D'} \circ S_D$

Décomposition d'une translation

Théorème

Toute translation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles
Plus précisément, soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul $\vec{u}$,
D une droite quelconque de direction orthogonale à celle de $\vec{u}$
et H est un point de D
Alors $t_{\vec{u}} = S_{D'} \circ S_D$, où D' est la droite parallèle à D et passant par le point K tel que $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\vec{u}$



Démonstration

Soient D et D' deux droites parallèles du plan, H un point de D et K son projeté orthogonal sur D'. Le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{HK}$ ne dépend pas du choix du point H sur D
On a : $S_{D'} \circ S_D = t_{2\vec{v}}$
Réciproquement : Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, pour toute droite D du plan on a : $S_D \circ S_D = t_{\vec{u}}$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, soit D une droite orthogonale à la direction du vecteur $\vec{u}$ et $D' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$

  alors on a : $t_{\vec{u}} = S_{D'} \circ S_D$

Classification des isométries selon leur décomposition en symétries orthogonales et leurs points fixes

Nature de l'isométrie	Décomposition en symétries orthogonales	Ensembles des points fixes
L'indenté du plan	$S_D \circ S_D$	Tout le plan
Symétrie orthogonale d'axe D	S_D	La droite D
Rotation de centre I et d'angle $\theta \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$S_{D'} \circ S_D$ avec $D' \cap D = I$	$\{I\}$
Translation de vecteur non nul	$S_D \circ S_{D'}$ avec $D' \cap D = \varnothing$	L'ensemble vide
Symétrie glissante d'axe D et de vecteur $\vec{u}$	$S_D \circ S_{D'} \circ S_{D''}$ avec $D' \cap D = \varnothing$ et $D \perp D''$	L'ensemble vide