

Epreuve :

Mathématiques

Durée : 3 heures

Lycée de Sbeïtla
Devoir de synthèse N°1
Classe : 4^{ème} Maths

Année scolaire : 2015 // 2016

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01 : (2points)

On donne ci-dessous la représentation graphique (ζ), dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et continue sur \mathbb{R} telle que :

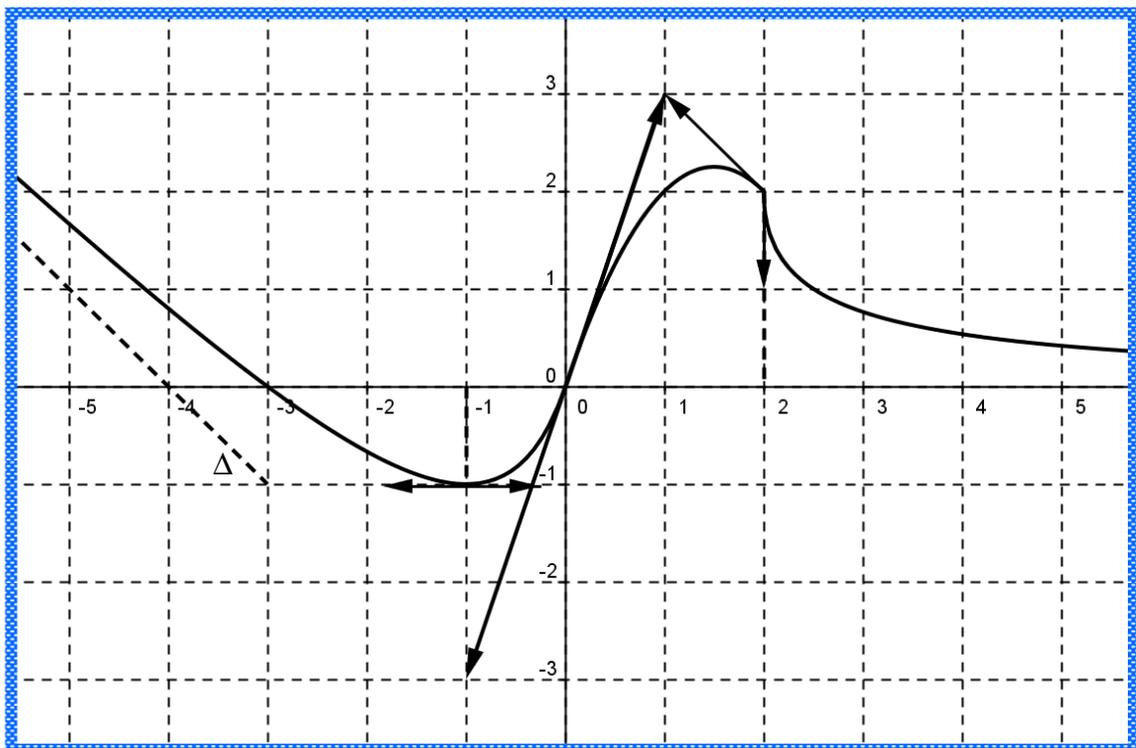
- ❖ La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à (ζ) au voisinage de $+\infty$
- ❖ La droite Δ d'équation $y = -x - 4$ est une asymptote à (ζ) au voisinage de $-\infty$

A l'aide d'une lecture graphique et avec justification :

a) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - 2}{x - 2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - 2}{4 - 2x}$$

b) Déterminer : $f'(-1)$, $f'(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f \circ f(x)}{f(x)}$



Exercice 02 : (8points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que $\forall x \geq 0, f'(x) = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

- b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$ et que
- $$\frac{3}{2} < \alpha < 2$$
- c) Tracer dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative (ζ) de f
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera
- b) Montrer que $\forall x \in J, f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x - 1}$
- c) Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative (ζ') de f^{-1}
- 3) Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$
- b) Montrer que pour tout x de $[1; 2], |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n - \alpha|$
- d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 4) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \begin{cases} f(\tan x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
- a) Montrer que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$
- b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], g(x) = 1 + \cos x$
- c) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1; 2]$
- d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1; 2[$ et que pour tout $x \in [1; 2[, (g^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

Exercice 03 : (5points)

Soit ABC un triangle isocèle rectangle tel que $\widehat{(\overline{BC}; \overline{BA})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On désigne par O le milieu de $[AC]$ et par D son symétrique par rapport à (BC)

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et O sur D

b) Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

2) Soit I le milieu de $[OB]$ et J le point d'intersection des droites (AD) et (BC)

On pose $K = f(I)$.

Montrer que K est le milieu de $[BD]$. En déduire que les points O, J et K sont alignés

3) Soit $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$

a) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$

b) En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$

4) On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$ et on désigne par Δ la médiatrice de $[BD]$

a) Montrer que h est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur \overline{BO}

b) Déterminer l'ensemble des point M du plan tel que $h(M) = f^{-1}(M)$

c) Caractériser l'application $S_{(BO)} \circ h$

Exercice 04 : (5points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overline{u}, \overline{v})$

Pour tout réel θ de $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$, on considère dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E_\theta) : z^2 - 2(i + \cos \theta)z + 2i \cos \theta = 0$$

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_θ)

2) On désigne par A, M et M' les points d'affixes respectives $i, z = i + e^{i\theta}$ et $z' = i + e^{-i\theta}$

a) Déterminer les ensembles décrits par M et M' lorsque θ décrit $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$

b) On note I le milieu de $[MM']$

Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$

3) a) Montrer que pour tout réel x on a : $i + e^{ix} = 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

b) Mettre alors z et z' sous forme exponentielle

4) a) Montrer que AMM' est un triangle isocèle en A

b) Déterminer θ pour que le triangle AMM' soit équilatéral

