Lycée de Sbeïtla

Prof : Elabidi Zahi

Devoir de contrôle N°3

Année Scolaire : 2013 - 2014

Epreuve : **Mathématiques**

$4^{ème}$ Maths

Exercice 01 : (6 points)

1) On considère l'équation (E) d'inconnue $(n;p)$ élément de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

$$(E): 11n-24p=1$$

a) Justifier que cette équation admet au moins une solution

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E)

c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E)

2) a) Justifier que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$

b) $(n;p)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (E), montrer que l'on peut écrire : $(10^{11n}-1)-10.(10^{24p}-1)=9$

c) Montrer que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$

(On rappelle l'égalité $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+....+a^0)$ valable pour tout $n\in\mathbb{N}^*$)

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers x et y tels que :

$$(10^{11}-1)x-(10^{24}-1)y=9$$

d) Montrer que tout diviseur commun de $(10^{11}-1)$ et $(10^{24}-1)$ divise 9

e) En déduire des questions précédentes le P.G.C.D de $(10^{11}-1)$ et $(10^{24}-1)$

Exercice 02 : (6points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ .On considère les points $A(0;1;0)$, $B(1;0;-2)$ et $C(0;0;-1)$

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

b) On note P le plan (ABC).Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x-y+z+1=0$

2) Soit le point $H(1;-1;0)$

a) Vérifier que H n'appartient pas à P

b) Calculer le volume du tétraèdre HABC

3) Soit $S=\{M(x;y;z) \text{ tel que } x^2-2x+y^2+2y+z^2-2=0\}$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon

b) Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle $\mathscr{C}$ que l'on caractérisera

4) Soit h l'homothétie de centre $\Omega(1;1;2)$ et de rapport 3

a) Donner l'expression analytique de h

b) Déterminer une équation de la sphère $S'=h(S)$ et du plan $P'=h(P)$

Exercice 03 : (8points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{\frac{1-x}{2}}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées

c) Tracer $\mathscr{C}$

d) Montrer que pour tout réel x de $[0;1]$, on a : $0 \le f(x) \le 1$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose, $I_n = \dfrac{1}{n!2^{n+1}} \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx$ et $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!2} + \dfrac{1}{2!2^2} + ... + \dfrac{1}{n!2^n}$

a) Donner la valeur de I_1 et montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}$$

b) Démontrer, par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \sqrt{e} - I_n$$

c) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n(n!)2^{n+1}}$

d) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$

Avec mes encouragements