

Epreuve :

Mathématiques

Durée : 2 heures

Lycée de Sbeitla
Devoir de contrôle N° 3

Classe : 4^{ème} Maths 2

Professeur :

Elabidi Zahi

Année scolaire : 2014 // 2015

Exercice 01

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on considère les points $A(0;0;1)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;0)$ et $D(1;1;1)$

- 1) a) Montrer que les points A, B et C sont non alignés
b) Calculer l'aire du triangle ABC
c) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C
e) Vérifier que le point D n'appartient pas à P
f) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$
- 2) Soit S l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + \frac{1}{2} = 0$
 - a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R
 - b) Montre que $S \cap P$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon
- 3) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2 .
Déterminer une équation cartésienne du plan Q image de P par h

Exercice 02

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On considère la courbe $\mathcal{H} : x^2 - y^2 - 1 = 0$

- 1) a) Montrer que \mathcal{H} est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets, les directrices et les asymptotes
b) Tracer \mathcal{H}
- 2) Soit \mathcal{A} l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par \mathcal{H} et la droite $\Delta : x = \sqrt{2}$. Montrer que $\mathcal{A} = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2 - 1} dt$
- 3) Soit $F : x \mapsto \int_1^{g(x)} \sqrt{t^2 - 1} dt$ où $g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
 - a) Montrer que F est dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer $F'(x)$; pour tout $x \geq 0$
 - b) En déduire $F(x)$ en fonction de x ; pour tout $x \geq 0$
 - c) Calculer $g(\ln(1 + \sqrt{2}))$. En déduire alors \mathcal{A}

Exercice 03

Partie A

- 1) Montrer que pour tout réel t strictement positif, $\ln t \leq t - 1$
- 2) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
 - a) Montrer que f est continue à droite en 0

- b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0
 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 3) Dresser le tableau de variation de f
- 4) Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 1
 b) Tracer T et \mathcal{C}
- 5) Soit $x > 1$ et (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $v_n = 1 + \frac{\ln x}{x} + \dots + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$
 Montrer que (v_n) est convergente et préciser sa limite

Partie B

Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{t}{\ln t - t} dt$

- 1) Etudier le sens de variation de F
 2) Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in]0; 1]$, $0 \leq \frac{x}{x - \ln x} \leq x$
 b) En déduire que pour tout $x \in]0; 1]$, $\frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0$ et que $-\frac{1}{2} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \leq 0$
- 4) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$
- 5) a) Soit $x > 0$. Calculer les intégrales $\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt$ et $\int_1^x (1 + \ln t) dt$
 b) Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\frac{t}{t - \ln t} \leq 1 + \ln t$
 c) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $F(x) \leq x \ln x$
 d) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $x + \frac{(\ln x)^2}{2} - 1 \leq F(x)$
 e) Donner un encadrement de l'intégrale $\int_1^e \frac{t}{t - \ln t} dt$