

Mathématiques	DEVOIR DE CONTRÔLE N° 03 Durée : 2 heures	Professeur
4^{ème} Maths	Année scolaire : 2015 // 2016	Elabidi Zahi

EXERCICE 01 (6 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(0;0;1)$, $B(1;0;1)$, $C(2;1;-1)$ et $I(-2;1;2)$

- 1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
b) Calculer l'aire du triangle ABC
c) En déduire la distance de C à la droite (AB)
- 2) a) On note P le plan (ABC). Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $2y + z - 1 = 0$
b) Montrer que les points A, B, C et I déterminent un tétraèdre dont on calculera le volume V
- 3) Soit S l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que :
 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z + 3 = 0$
a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon
b) Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle \mathcal{C} dont on précisera le centre Ω et le rayon r
- 4) Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{5}$
a) Donner l'expression analytique de h
b) Déterminer $S' = h(S)$
c) Déterminer une équation cartésienne de $P' = h(P)$

EXERCICE 02 (5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la courbe (E) d'équation $x^2 - 4x + 4y^2 + 3 = 0$

- 1) Montrer que (E) est une ellipse dont on précisera les foyers et les directrices
- 2) Soit ζ la courbe représentative, dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$, de la fonction f définie sur $[1;3]$ par
 $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$. Justifier que $(E) = \zeta \cup \zeta'$ où $\zeta' = S_{(O,\vec{i})}(\zeta)$
- 3) Soit F la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $F(x) = \int_1^{2+\cos x} f(t)dt$
a) Montrer que $\forall x \in [0;\pi], F'(x) = -\frac{1}{2} \sin^2 x$.
b) En déduire que : $\forall x \in [0;\pi], F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \sin 2x$
c) Déterminer alors l'aire de la surface intérieure de (E)

EXERCICE 03 (09 points)

I- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans

un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Dresser le tableau de variation de f
- 2) a) Déterminer les branches infinies de (C)
b) Tracer (C)
- 3) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera
b) Tracer, dans le même repère la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1} de f
c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
- 4) a) Vérifier que pour tout réel x , on a : $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$
b) Soit λ un réel strictement négatif.
Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limitée par la courbe (C) de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$

II- Pour tout entier naturel non nul n et tout réel négatif x on pose $F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$

- 1) a) Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_1(x) = \ln 2$
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_2(x)$
- 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \leq 0$ on a : $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n}(1 - e^{nx})$
b) Montrer par récurrence sur n , que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$
- 3) a) Vérifier que $\forall t \leq 0$, $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$
b) Montrer que $\forall n \geq 2$ et $\forall x \leq 0$ on a : $\frac{1}{2n}(1 - e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}(1 - e^{(n-1)x})$
c) En déduire un encadrement de $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x)$ pour $n \geq 2$

