Epreuve : Mathématiques

Durée : 2 heures

Lycée de Sbeïtla
Devoir de contrôle N° 2
Classe : $4^{\text{ème}}$ Maths 2

Année scolaire : 2014 // 2015

Professeur : Elabidi Zahi

Exercice 01 : (7 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AB = 2AD$

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BD) et par E l'intersection de (AH) et (BC)

1) Soit f la similitude directe qui envoie D en A et A en B
   a) Déterminer le rapport et l'angle de f
   b) Montrer que H est le centre de f
   c) Déterminer les images des droites (BD) et (AB) par f
   d) En déduire que $f(B) = E$
2) Soit g la similitude indirecte qui envoie D en A et A en B
   a) Monter que $f \circ g^{-1} = S_{(AB)}$
   b) Soit $F = g(B)$ .Déterminer $S_{(AB)}(F)$
      Construire alors F
   c) Soit Ω le centre de g. Montrer Ω appartient à (BD) et à (AF)
   d) Construire alors Ω et l'axe Δ de g

Exercice 02 : (9 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$

1) Etudier f et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
   (**Unité graphique** : **2cm**)
2) Soit F la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \int_0^{\tan^2 x} f(t)\,dt$
   a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x) = 4\tan^2 x$
   b) Calculer $F(0)$ puis exprimer $F(x)$ en fonction de x
   c) En déduire la valeur de l'intégrale $A = \int_0^1 f(t)\,dt$
3) Déterminer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ de f et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$
4) Pour tout entier naturel non nul n on pose $S_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{\sqrt{k}}{n+k} \right)$
   a) Montrer que pour tout entier $k \in \{0;1;\ldots;n-1\}$ on a : $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \le \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A - \dfrac{1}{n} \le S_n \le A$
   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Exercice 03 : (4 points)

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin 2x \, dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$

3) a) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+2} = \frac{(n+2)}{4}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} - (n+1)I_n\right]$$

b) Calculer alors I_3

Avec mes encouragements