Lycée de Sbeïtla ☼☼☼☼☼ Devoir de contrôle n° 2	Epreuve : **Mathématiques**
	Durée : 2 heures
Classe : $4^{\text{éme}}$ Maths 2	Prof : Elabidi Zahi

Exercice 01 : (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes une et une seule réponse est correcte ; noter sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la bonne réponse.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=2i\bar{z}+1+i$ alors $g\circ g$ est :
   a) Une similitude indirecte de rapport 4 et de centre $\Omega\,(-1-i)$
   b) Une homothétie de rapport 4 et de centre $\Omega\,(-1-i)$
   c) Une homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega\,(-1-i)$

2) La parabole de foyer $F(0;-2)$ et de directrice $D: y=2$ a pour équation :
   a) $y^2=-4x$ b) $x^2=-4y$ c) $x^2=-8y$

3) Soit h une fonction continue sur l'intervalle $[-1;3]$. Alors $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x h(t)\,dt$ égale à :
   a) 0 b) $h(2)$ c) $+\infty$

4) Soit f une fonction continue et positive $[-1;1]$ telle que l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f et les droites d'équations $y=0$, $x=-1$ et $x=1$ est égale à 4 alors il existe un réel $c\in[-1;1]$ telle que $f(c)$ égale à :
   a) 0 b) 2 c) 4

Exercice 02 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;2[$ par $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$

1) Montrer que f réalise une bijection de $]0;2[$ sur un intervalle J que l'on précisera

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x\in J$; $(f^{-1})'(x)=\frac{2}{\pi\,(x^2+1)}$

3) Pour tout x non nul , on pose $h(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
   a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $h'(x)$
   b) En déduire que h est constante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
      Déterminer chacune de ces constantes

Exercice 03 : (5 points)

Soit g la fonction définie sur $[0;1[$ par $g(t)=\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$

1) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g(t)\,dt=-\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt$

2) Soit G la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $G(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et calculer $G'(x)$

b) En déduire que $G(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)$, pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

c) Calculer alors $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt$ et $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}g(t)\,dt$

Exercice 04 : (6 points)

Soit ABCD un carré direct de centre O et de coté 2. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$

1) a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe f qui envoie D en O et C en I
   b) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de f
   c) Construire le centre Ω de f
2) a) Déterminer $f((BD))$ et $f((BC))$ .En déduire $f(B)$
   b) Montrer que $f(A)=J$
   c) Caractériser $f\circ f$ et En déduire que Ω est le barycentre des points pondérés $(B;1)$ et $(J;4)$
3) Soit g la similitude indirecte qui envoie D en O et C en I
   a) Montrer que $g=S_{(OI)}\circ f$ .Déterminer $g(B)$
   b) Donner la forme réduite de g

Bon travail