Mathématiques

4ème Maths

DEVOIR DE CONTRÔLE N° 2

Durée : 2 heures

Année scolaire : 2015 // 2016

Professeur

Elabidi Zahi

EXERCICE 01 (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 - x + y = 0$

1) Montrer que $\mathcal{P}$ est une parabole dont précisera le foyer F et la directrice $\mathcal{D}$

2) Vérifier que $A(2;1) \in \mathcal{P}$ et déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{P}$ en A

3) Déterminer les coordonnées du point B de $\mathcal{P}$ tel que la tangente à $\mathcal{P}$ en ce point est perpendiculaire à $\mathcal{T}$

EXERCICE 02 (7points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle ABCD de centre O tel que $AB = 2AD$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$

La perpendiculaire à la droite (AC) passant par I coupe (CD) en E

Soit S la similitude directe telle que $S(A) = I$ et $S(B) = J$

1) Déterminer le rapport k et une mesure de l'angle θ de S

2) a) Déterminer les images des droites (AC) et (BC) par S

 b) Déterminer alors $S(C)$

3) Soit Ω le centre de S

 a) Montrer que $S \circ S$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$

 b) Montrer que $S \circ S(A) = O$ .En déduire que $\Omega \in (AO)$

 c) Soit $H = I * E$ .Montrer que $S \circ S(I) = H$. En déduire que $\Omega \in (IH)$ et construire Ω

4) Soit φ la similitude indirecte de centre Ω qui envoie I sur A

 a) Déterminer le rapport de φ

 b) Construire l'axe Δ de φ

 c) Soit F le symétrique de Ω par rapport à I.

 Montrer que Δ est la médiatrice du segment $[AF]$

EXERCICE 03 (9points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

 b) Vérifier que la droite $\Delta : x = 1$ est un axe de symétrie de ζ

c) Préciser les branches infinies de ζ

d) Tracer ζ

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_1^{1+\tan x}\frac{dt}{t^2-2t+2}$

a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x)=1$

b) En déduire que $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[, F(x)=x$ et que $\int_1^2\frac{dt}{t^2-2t+2}=\frac{\pi}{4}$

3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^2\ln(t^2-2t+2)=2\ln 2-2\int_1^2\frac{t^2-t}{t^2-2t+2}dt$$

b) Vérifier que pour tout réel t , $\frac{t^2-t}{t^2-2t+2}=1+\frac{t-1}{t^2-2t+2}-\frac{1}{t^2-2t+2}$

c) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$