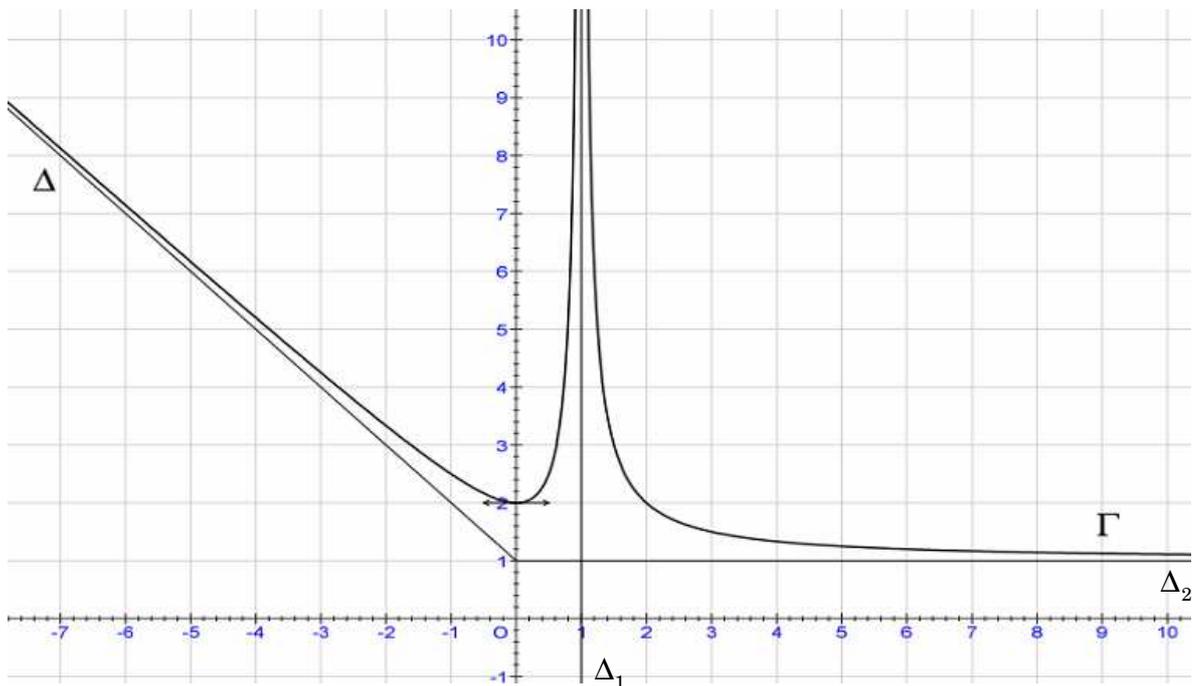


Exercice 1 : (4 points)

Dans la figure ci-dessous Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La droite $\Delta : y = -x + 1$ est une asymptote à Γ au voisinage de $-\infty$, la droite

$\Delta_1 : x = 1$ est une asymptote verticale à Γ et la droite $\Delta_2 : y = 1$ est une asymptote à Γ au voisinage de $+\infty$



1) Par une lecture graphique, déterminer :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 4}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \begin{cases} f \circ f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Déterminer $g(2)$, $g(0)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

b) Montrer que g est continue sur \mathbb{R}

c) Déterminer l'image de $] -\infty; 1[$ par g

Exercice 2 : (5 points)

Soit a un nombre complexe non nul

On considère l'équation $(E) : z^2 + iaz - (1+i)a^2 = 0$

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)

2) Dans Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A, M et M' d'affixes respectives $1, a$ et $(-1-i)a$

Soit N le point tel que :

$$\begin{cases} ON = \sqrt{2} OM \\ (\widehat{OM, ON}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

- Déterminer en fonction de a l'affixe z_N de N
 - Vérifier que M' et N sont symétriques par rapport à O
 - Montrer que le triangle OMN est rectangle isocèle en M
- 3) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $z_N \in]-\infty; 0[$
- 4) On pose $a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta}$, où $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} [$
- Ecrire $z_N - 1$ sous forme exponentielle
 - Déterminer la valeur de θ pour la quelle OAN est un triangle équilatéral

Exercice 3 : (4 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O

On désigne par I, J , et k les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$ et $[BC]$

- Soit $f = S_{(AC)} \circ S_{(OI)}$. Caractériser f
- On pose : $g = t_{\overline{BA}} \circ S_{(BD)}$
 - Déterminer $g(A)$, $g(B)$ et $g(I)$
 - Soit $\Omega = g(K)$. Montrer que $A = I * \Omega$
 - Déterminer la droite Δ telle que $t_{\overline{OA}} = S_{\Delta} \circ S_{(BD)}$
 - En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur
- Soit $\varphi = g^{-1} \circ f$
 - Déterminer $\varphi(A)$, $\varphi(I)$
 - Trouver l'ensemble des points du plan tels que $f(M) = g(M)$

Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

- Dresser le tableau de variations de f
 - En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1; +\infty[$ une unique solution α et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$
 - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$
- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
 - Montrer que g réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera
 - Expliciter $g^{-1}(x)$, pour $x \in J$
 - Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_n < 2$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

d) En déduire alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par
$$h(x) = \begin{cases} g\left(\left(\frac{1 - \tan x}{\tan x}\right)^2\right) & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que h est continue à droite en 0

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $h(x) = \frac{1}{1 - \tan x}$

c) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle K que l'on précisera

Avec mes encouragements

