Lycée de Sbeïtla ☼☼☼☼☼ Devoir de synthèse n° 2	Epreuve : **Mathématiques**
	Durée : 4heures
Classe : $4^{\text{éme}}$ Maths 2	Prof : Elabidi Zahi

Exercice 01 : (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes une et une seule réponse est correcte ; noter sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la bonne réponse.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$

1) L'hyperbole (H) d'équation : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ a pour excentricité :

a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\frac{5}{2}$

2) Le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\ln\left(-\frac{1}{x}\right)\right)$ est :

a) $]-\infty;0[\setminus \{-1\}$ b) $]-1;0[$ c) $]-\infty;0[$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ égale à :

a) 0 b) 1 c) $+\infty$

4) Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^{\ln x} t^2\, dt$ alors $\forall x > 0$

a) $F'(x) = (\ln x)^2$ b) $F'(x) = (\ln x)^2 - x^2$ c) $F'(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

5) Soit $\zeta = \left\{ M(x;y) \text{ tels que } y = \frac{\sqrt{3}x}{x^3+1} \text{ et } 0 \le x \le 1 \right\}$ alors le volume du solide obtenu par rotation de ζ autour de l'axe des abscisses est égal à :

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{3\pi^2}{4}$

6) L'application g du plan dans lui-même qui a tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z + 1 + 2i$ est une :

a) Similitude indirecte de rapport $\sqrt{2}$
b) Similitude directe de rapport $\sqrt{2}$
c) Similitude directe de rapport $\sqrt{5}$

Exercice 02 : (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$; on considère la courbe ζ d'équation : $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$

1) Montrer que ζ est une ellipse dont on précisera l'excentricité e, le centre Ω, les foyers F et F' et les directrices associées D et D'

2) a) Déterminer les points d'intersection de ζ et l'axe des ordonnées (On désigne par M_1 le point d'ordonnée positive)

b) Déterminer les sommets de ζ puis la tracer

3) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à ζ en M_1

b) Soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs de F et F' sur (T)

Montrer que $FH.F'H' = 3$

Exercice 03 : (5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

On désigne par H le milieu de $[BC]$ et par I le symétrique de A par rapport à B

1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en H
   a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de f
   b) Soit Ω le centre de f. Montrer que $\Omega \in \mathscr{C}$ et que les points Ω, A et H sont alignés
   c) Construire alors Ω
2) Soit r la rotation de centre A qui transforme C en B. On pose $h = f \circ r$
   a) Déterminer $h(A)$
   b) En déduire que h est une homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$
3) Soit g l'antidéplacement qui envoie I en B et B en A
   Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur
4) On pose $\Psi = h \circ g$
   a) Montrer que Ψ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport
   b) Soit D le milieu de $[BI]$.Déterminer $\Psi(B)$ et $\Psi(D)$
   c) En déduire les éléments caractéristiques de Ψ

Exercice 04 : (8 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 1 + x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0
   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu
2) a) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$
   b) Soit $x > 0$, en utilisant l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $g : t \mapsto \ln t$ sur l'intervalle $[x; x+1]$.Montrer que $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \le \ln(x+1) - \ln x \le \dfrac{1}{x}$ $\quad (*)$
   c) Dresser alors le tableau de variation de f puis tracer ζ
3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera
   b) Tracer dans le même repère la courbe représentative ζ' de la fonction f^{-1} réciproque de f
4) a) Soit $\alpha \in]0,1[$, calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe ζ l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 1$
   b) Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathscr{A}(\alpha)$
5) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{f(k)}{k}$ et $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots.. + \dfrac{1}{2n}$
   a) Montrer que $\forall k \ge 1$ on a: $\quad 0 \le \dfrac{f(k)}{k} \le \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ (on utilisera $(*)$)
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \le S_n \le \dfrac{n+1}{n(2n+1)}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$
   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = u_n - \ln 2 - \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)$ En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Bon travail