Mathématiques $4^{ème}$ Maths	LYCÉE DE SBEÏTLA DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 3 Durée : 4 heures Année scolaire : 2015 // 2016	Professeur : Elabidi Zahi

EXERCICE 01 : (3 points)

On considère l'équation différentielle $(E): y' - 2y = xe^x$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
2) Soit a et b deux réels et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)e^x$
   a) Déterminer a et b pour que g soit une solution de (E)
   b) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E_0)
   c) En déduire l'ensemble des solutions de (E)
3) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0

EXERCICE 02 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x^2)$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

I.1) Montrer que pour tout x appartenant $[0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$

2) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé
3) Dresser le tableau de variation de f
4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O
   b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C)
   c) Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la droite Δ et la courbe (C)

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée
   b) En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = x$
   c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$
2) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$
   a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$
   b) En déduire la valeur de $\mathscr{A}$

EXERCICE 03 : (4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 2\times 10^n + 1$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n est divisible par 3

2) a) Discuter selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de a_n par 11

   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n et 11 sont premiers entre eux

3) On considère, dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(E): a_2x + 11y = 1$

   a) Vérifier que le couple $(4, -73)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

   b) Résoudre, dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E)

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$

   On considère le point A_n d'affixe $z_n = 2e^{i\frac{a_n\pi}{4}}$

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n appartient à un cercle fixe que l'on précisera

   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \{A_1 ; A_2\}$

EXERCICE 04: (4 points)

Une usine fabrique des stylos à bille .Une étude statistique à montré que 90% de la production ne présente pas de défaut. Chaque stylo est soumis à un contrôle de fabrication
Ce contrôle refuse 94% des stylos avec défaut et accepte 92% des stylos sans défaut
On choisit au hasard un stylo avant son contrôle
On désigne par D l'évènement « le stylo à un défaut » et par A l'évènement « le stylo est accepté à l'issue du contrôle »

1) a) Déterminer les probabilités $p(\overline{D})$, $p(\overline{A}/D)$ et $p(A/\overline{D})$

   b) Calculer la probabilité que le stylo soit accepté

2) Calculer la probabilité qu'un stylo à un défaut sachant qu'il est accepté

3) Les stylos acceptés à l'issue du contrôle se vendent par paquet de quatre
   On admet que la probabilité qu'un stylo accepté présente un défaut est $0{,}007$
   Calculer une valeur arrondie à 10^{-3} près de la probabilité qu'un paquet contienne au moins un stylo présentant un défaut

4) On estime que la durée de vie T en jours d'un stylo accepté suit la loi exponentielle de paramètre λ un réel strictement positif

   a) Déterminer λ sachant que $p(T>10) = \dfrac{1}{e}$

   b) On sait que le stylo a déjà dépassé 10 jours d'utilisation .Quelle est la probabilité qu'il dépasse 15 jours ?

   c) Soit h un réel strictement positif. Montrer que $p\big((T>10+h)/(T>10)\big) = p(T>h)$

EXERCICE 05: (3 points)

On donne les hauteurs, en centimètres, d'une plante mesurée tous les trois jours à midi du premier au 16 juillet

Jour x_i	1	4	7	10	13	16
Hauteur y_i	6,5	8,4	12	15,4	19,7	24,6

On pose $Z = \ln Y$

Les valeurs de Z, arrondis à 10^{-2} près, sont données dans le tableau qui suit

Jour x_i	1	4	7	10	13	16
$z_i = \ln y_i$	1,87	2,13	2,48	2,73	2,98	3,20

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire ρ de la série (X, Z) .Interpréter le résultat

2) a) Donner une équation de la droite de régression de Z en X

(On donnera les coefficients de cette équation arrondis à 10^{-2} près)

b) En déduire que l'expression de Y en fonction de X est de la forme $Y = \alpha e^{\beta X}$

(α et β étant deux réels dont on donnera les valeurs respectives arrondies à 10^{-2} près)

3) On suppose que la croissance se poursuit ainsi tous le mois de juillet

a) A quelle date la plante mesurera-t-elle 40 cm ?

b) Quelle est la hauteur atteinte le 31 juillet à midi ?

Que Dieu soit à l'aide de tous