Epreuve :

Mathématiques

Durée : 2 heures

Lycée de Sbeïtla
Devoir de contrôle N°1
Classe : $4^{\text{ème}}$ Maths 2

Année scolaire : 2014 // 2015

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01 : (3 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

1) Soit z un nombre complexe non nul, si z^3 est un réel alors z est un réel

2) Soient z et z' deux nombres complexes non nuls, si $|z| = |z'|$ alors $z = z'$ ou $z = -z'$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\dfrac{iz+1}{z-1}$ est un réel est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A où $A(1)$ et $B(i)$

4) Soit θ un réel de $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$, l'écriture exponentielle de $\dfrac{i}{1+i\tan\theta}$ est $\cos\theta . e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

Exercice 02 : (6 points)

Pour tout réel $\theta \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on considère l'équation $(E_\theta): z^2 - z + e^{i2\theta} - ie^{i\theta} = 0$

1) a) Calculer $(1+2ie^{i\theta})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ)

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On désigne par A, M' et M'' les points d'affixes respectives 1, $z' = 1 + ie^{i\theta}$ et $z'' = -ie^{i\theta}$

a) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle

b) Montrer que le quadrilatère $OM'AM''$ est un parallélogramme

c) Déterminer θ pour que $OM'AM''$ soit un losange

3) Soit l'équation $(E): (z+2i)^3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z^3$

a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^*, \dfrac{z+2i}{z} = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = \cot g\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - i$

c) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E)

Exercice 03 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2+x+2} - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) a) Montrer que $\forall x < 1$, $\frac{x+1}{x-1} \le f(x) \le 1$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

b) En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2}$

Exercice 04 : (6points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{9+u_n^2}{2u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 3$

2) a) Montrer que (u_n) est une suite décroissante

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 3 \le \frac{1}{2}(u_n - 3)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 \le 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$ et $w_n = \frac{v_n}{n}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3n < v_n \le 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 3n$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$

Correction

Exercice 01

1) Faux : (Contre exemple : pour $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ on a : $z^3 \in \mathbb{R}$ et $z \notin \mathbb{R}$)

2) Faux : (Contre exemple : Pour $z = 1+i$ et $z' = 1-i$ on a : $|z| = |z'|$ et $z \neq z'$ et $z \neq -z'$)

3) Vrai : soit $\zeta = \left\{ M(z) \text{ , tel que } \frac{iz+1}{z-1} \in \mathbb{R} \right\}$ et soient $A(1)$ et $B(i)$ alors :

$$M(z) \in \zeta \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{iz+1}{z-1} \in \mathbb{R} \\ z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{i(z-i)}{z-1} \in \mathbb{R} \\ z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z-i}{z-1} \in i\mathbb{R} \\ z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}} \in i\mathbb{R} \\ z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AM} \\ M \neq A \end{cases}$$

Equivaut M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A

4) Faux : $\forall \theta \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[, \cos\theta < 0$

Exercice 02

Soit l'équation $(E_\theta): z^2 - z + e^{i2\theta} - ie^{i\theta} = 0$ où $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

1) a) $(1+2ie^{i\theta})^2 = 1 + 4ie^{i\theta} - 4e^{i2\theta}$

b) Le discriminant de l'équation (E_θ) est $\Delta = 1 - 4(e^{2i\theta} - ie^{i\theta}) = 1 - 4e^{2i\theta} + 4ie^{i\theta}) = (1+2ie^{i\theta})^2$

Alors $1+2ie^{i\theta}$ est une racine carrée de Δ et donc les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E_θ) sont $z' = \frac{1+1+2ie^{i\theta}}{2} = 1 + ie^{i\theta}$ et $z'' = \frac{1-1-2ie^{i\theta}}{2} = -ie^{i\theta}$ alors $S_{\mathbb{C}} = \left\{1+ie^{i\theta}, -ie^{i\theta}\right\}$

2) a) • $z' = 1 + ie^{i\theta} = 1 + e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

Or $\forall \theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$

Donc la forme exponentielle de z' est $2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

• $z'' = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$

b) On a : $z_A - z_{M''} = 1 - (-ie^{i\theta}) = 1 + ie^{i\theta} = z_{M'} \Rightarrow \overrightarrow{M''A} = \overrightarrow{OM'}$ et comme O, A et M'' sont non alignés alors $OM'AM''$ est un parallélogramme

c) On a : $OM'AM''$ est un parallélogramme alors pour que $OM'AM''$ soit un losange il suffit que $OM'' = OM'$ .Donc

$$OM' = OM'' \Leftrightarrow |z'| = |z''| \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \\ \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta' = \frac{1}{2} \\ \theta' = \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} \\ \theta' \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta' = \frac{\pi}{3} \\ \theta' = \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

D'où $OM'AM''$ est un losange si est seulement si $\theta = \frac{\pi}{6}$

3) Soit l'équation $(E):(z+2i)^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z^3$

a) On a $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{i\frac{\pi}{4}}$ alors les racines cubiques de $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

sont les nombres complexes $z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k\in\{0,1,2\}$

b) $\forall\in\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{2n\pi\ ,\ n\in\mathbb{Z}\}$, $\forall z\in\mathbb{C}^*,\frac{z+2i}{z}=e^{i\alpha}\Leftrightarrow z+2i=ze^{i\alpha}\Leftrightarrow z(e^{i\alpha}-1)=2i\Leftrightarrow z=\frac{2i}{e^{i\alpha}-1}$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2i}{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)}\Leftrightarrow z=\frac{2ie^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\Leftrightarrow z=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\Leftrightarrow z=\cot g\left(\frac{\alpha}{2}\right)-i$$

c) Il est clair que 0 n'est une solution de l'équation (E) alors :

$$\forall z\in\mathbb{C}^*\ ,(z+2i)^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z^3\Leftrightarrow\left(\frac{z+2i}{z}\right)^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\Leftrightarrow\frac{z+2i}{z}=z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\text{ avec }k\in\{0,1,2\}$$

Et comme $\forall k\in\{0,1,2\},\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\in\ \mathbb{R}\setminus\{2n\pi\ ,\ n\in\mathbb{Z}\}$ alors z une est solution de (E) dans $\mathbb{C}$ équivaut à $\Leftrightarrow z=\cot g\left(\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{3}\right)-i$, avec $k\in\{0,1,2\}$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{\cot g\left(\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{3}\right)-i\ ,\text{ avec }k\in\{0,1,2\}\right\}$$

Exercice 03

1) $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

2) a) Pour tout $x\in\ ]-\infty\ ;1[$, on a $-1\le\cos(\pi x)\le1\Rightarrow x-1\le x+\cos(\pi x)\le x+1$

Et comme $\forall x\in\ ]-\infty\ ;1[,\frac{1}{x-1}<0$ alors $\frac{x+1}{x-1}\le\frac{x+\cos(\pi x)}{x-1}\le1\ \Rightarrow\frac{x+1}{x-1}\le f(x)\le1$

b) On a : $\begin{cases}\forall x<1,\ \frac{x+1}{x-1}\le f(x)\le1\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$

3) • La fonction $x\mapsto x^2+x+2$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ alors la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+x+2}$ est continue sur $[1,+\infty[$

- La fonction $x \mapsto -x$ est continue sur $[1,+\infty[$

 Alors la fonction f est continue sur $[1,+\infty[$

- Les fonctions $u : x \mapsto x+\cos\pi x$ et $v : x \mapsto x-1$ sont continues sur $]-\infty,1[$

 Et $\forall x\in]-\infty,1[, x-1\neq 0$ alors la fonction $\frac{u}{v}$ est continue sur $]-\infty,1[$

 $\Rightarrow$ f est continue sur $]-\infty,1[$

- On pose $t = x-1$, pour tout $x<1$, alors si $x\to 1^-, t\to 0^-$ donc :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x+\cos(\pi x)}{x-1} = \lim_{t\to 0^-}\frac{t+1+\cos\pi(t+1)}{t} = \lim_{t\to 0^-}\left(1+\frac{1-\cos\pi t}{t}\right) = 1 = f(1)$$

 (car $\lim_{t\to 0^-}\frac{1-\cos\pi t}{t} = 0$) Alors f est continue à gauche en 1

Conclusion :

f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $[1,+\infty[$ et continue à gauche en 1 alors f est continue sur $\mathbb{R}$

4) a) f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\left[-\frac{1}{2};0\right]$; et $f(-\frac{1}{2})\times f(0) = \frac{1}{3}\times(-1) = -\frac{1}{3} < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}\ ;0\right[$

 b) $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\cos(\pi\alpha)}{\alpha-1} = 0 \Leftrightarrow \alpha+\cos(\pi\alpha)=0 \Leftrightarrow \cos(\pi\alpha) = -\alpha$

 Or $\cos^2(\pi\alpha)+\sin^2(\pi\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\pi\alpha) = 1-\cos^2(\pi\alpha)$

 Alors $\sqrt{\sin^2(\pi\alpha)} = \sqrt{1-\cos^2(\pi\alpha)} \Leftrightarrow |\sin(\pi\alpha| = \sqrt{1-\alpha^2}$

 Et puisque $\alpha\in\left]-\frac{1}{2}\ ;0\right[$ alors $\pi\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ;0\right[$ donc $\sin(\pi\alpha)<0$

 Par conséquent $-\sin(\pi\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2} \Rightarrow \sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2}$

Exercice 04

1) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n > 3$

- Pour $n=0$, $u_0 = 6 \Rightarrow u_0 > 3$
- Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>3$ et montrons que $u_{n+1}>3$
- On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-3 = \frac{9+u_n^2}{2u_n} - 3 = \frac{9+u_n^2-6u_n}{2u_n} = \frac{(3-u_n)^2}{2u_n} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 3$

 Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>3$

2) a) On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \frac{9+u_n^2}{2u_n} - u_n = \frac{9+u_n^2-2u_n^2}{2u_n} = \frac{9-u_n^2}{2u_n} = \frac{(3-u_n)(3+u_n)}{2u_n}$

 Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>3$ alors $\frac{(3+u_n)}{2u_n} > 0$ et $3-u_n<0 \Rightarrow \frac{(3-u_n)(3+u_n)}{2u_n} < 0 \Rightarrow u_{n+1}-u_n<0$

 Alors (u_n) est une suite décroissante

 b) La suite (u_n) est une décroissante minorée par 3 alors elle converge vers un réel $l \geq 3$

$$\text{On a : }\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\ ,u_n>3 \text{ et } u_{n+1}=f(u_n)\text{où } f: x\mapsto \dfrac{9+x^2}{2x}\\ (u_n)\text{ converge vers } l\in[3;6]\ \ (u_n\le u_0)\\ f \text{ continue sur } [3;6] \text{ donc} f \text{ est continue en } l\end{cases}$$

Alors l est une solution dans $[3;6]$ de l'équation $f(l)=l$

$$\text{Ainsi }\begin{cases}f(l)=l\\ l\in[3;6]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{9+l^2}{2l}=l\\ l\in[3;6]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9+l^2=2l^2\\ l\in[3;6]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9=l^2\\ l\in[3;6]\end{cases}\Leftrightarrow l=3$$

3) a) On a : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,u_{n+1}-3=\dfrac{(u_n-3)^2}{2u_n}=\dfrac{(u_n-3)}{2u_n}.(u_n-3)$

Et comme (u_n) est décroissante alors $\forall n\in\mathbb{N},u_n\le u_0\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},u_n\le 6\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},u_n-3\le 3$

En plus $\forall n\in\mathbb{N},u_n\ge 3\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},2u_n\ge 6\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\dfrac{1}{2u_n}\le\dfrac{1}{6}$

$$\text{Ainsi}\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\begin{cases}0<u_n-3\le 3\\ 0<\dfrac{1}{2u_n}\le\dfrac{1}{6}\end{cases}\Rightarrow\frac{u_n-3}{2u_n}\le\frac{1}{2}\text{ donc }\forall n\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\frac{(u_n-3)}{2u_n}.(u_n-3)\le\frac{1}{2}(u_n-3)$$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}\ ,u_{n+1}-3\le\dfrac{1}{2}(u_n-3)$

b) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}\ ,u_n-3\le 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Pour $n=0$, $u_0-3=3$ et donc $u_0-3\le 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}\ ,u_n-3\le 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1}-3\le 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\text{On a : }\forall n\in\mathbb{N}\ ,u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)\text{ et } u_n-3\le 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow u_{n+1}-3\le 3.\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow u_{n+1}-3\le 3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Conclusion: $\forall n\in\mathbb{N}\ ,u_n-3\le 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\text{c) On a : }\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\ ,0<u_n-3\le 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n-3=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=3$$

4) a) On a : $\forall k\in \mathbb{N}, 0 < u_k - 3 \le 3.\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Alors $\forall n\in \mathbb{N}^*$; $0<\sum_{k=0}^{n-1}(u_k-3)\le \sum_{k=0}^{n-1}3\left(\frac{1}{2}\right)^k \Rightarrow 0<\sum_{k=0}^{n-1}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}3\le 3\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$\Rightarrow 0<\sum_{k=0}^{n-1}u_k-3n\le 3.\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow 0<\sum_{k=0}^{n-1}u_k-3n\le 6.\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow 3n<\sum_{k=0}^{n-1}u_k\le 6.\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n \Rightarrow 3n<v_n\le 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n$$

b) $\bullet$On a : $\begin{cases}\forall n\in \mathbb{N}^*, 3n<v_n\le 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}3n=\lim\limits_{n\to+\infty}6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n=+\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

$\bullet$On a : $\forall n\in \mathbb{N}^*, 3n<v_n\le 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n \Rightarrow 3<\frac{v_n}{n}\le \frac{6}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3$

$\Rightarrow \forall n\in \mathbb{N}^*, 3<w_n\le \frac{6}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3$

Ainsi : $\begin{cases}\forall n\in \mathbb{N}^*, 3<w_n\le \frac{6}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3=3\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}w_n=3$