Epreuve :	**Lycée de Sbeïtla**	**Professeur :**
Mathématiques	**Devoir de contrôle N°1**	**Elabidi Zahi**
Durée : 2 heures	**Classe : 4ème Maths**	
	Année scolaire : 2015 // 2016	

Exercice 01 : (6points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)-1 & \text{si } x<0 \\ 2x-\sqrt{x^2+x+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que pour tout $x<0$, on a : $-1-x^2\leq f(x)\leq x^2-1$

b) En déduire que f est continue en 0

c) Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$

d) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $]-3;-2[$

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote à ζ au voisinage de $+\infty$

Exercice 02 : (7points)

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=4$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+2}$

1) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_n>2$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

2) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-2\leq\frac{3}{4}(u_n-2)$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_n-2\leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ Retrouver ainsi $\lim\limits_{n\to +\infty} u_n$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} ku_k$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq S_n-n(n+1)\leq 6n\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{S_n}{n^2}$

Exercice 03 : (7points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - i(2-e^{i\theta})z + e^{i\theta} - 1 = 0$, où θ est un réel de $]0;2\pi[$

   a) Résoudre l'équation (E)

   b) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle

2) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

   On désigne par ζ le cercle de centre B et de rayon 1

   Soit f l'application de $P\setminus\{B\}$ vers $P\setminus\{A\}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

   a) Montrer que f n'a aucun point invariant

   b) Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$, on a : $z'-1 = \dfrac{-2i}{\overline{z}+i}$

   c) En déduire que $\forall\ M \in P\setminus\{B\}$, on a : $AM'.BM = 2$ et $(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

   d) En déduire une construction de l'image d'un point M de ζ