Mathématiques		*Devoir de Synthèse n°2*	
Lycée Pilote Monastir			
$4^{\text{éme}}\text{M}_2$	*12/03/2024*	Durée : 4heures	*Prof : Yacoubi .H*

Exercice N°1 :(4,5 points)

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points $A(2,0,2), B(4,-3,0)$, $C(2,-1,1)$

1)a) Déterminer les coordonnées du point D telque $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OD}$

b)Soit P le plan passant par les points A, B et C

Déterminer le volume ϑ du tétraèdre $OABC$ puis déduire la distance du point D au plan P

c) Montrer qu'une équation cartésienne de Pest : $x + 2y - 2z + 2 = 0$

2) On désigne par S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de ξ telsque :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$

a) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R

b) Montrer que P coupe S suivant un cercle ζet de rayon $r = \sqrt{3}$,dont on déterminera les coordonnées de son centre H

3) Soit $E(\alpha, -1, \beta)$ un point de la sphère S ,où α et β 2 réels et soit le plan

$Q: (\alpha - 1)x + y + (\beta + 2)z - \alpha + 2\beta + 3 = 0$

a) Montrer que S et Q sont tangents en E

b) Déterminer α et β pour P et Q soient parallèles

4) a) Déterminer la distance de Ω à la droite (AC) ,déduire la position de S et la droite (AC)

b) Déterminer les homothéties de centreΩ qui transforment la droite (AC) en une droite tangente à la sphère (S)

Exercice N°2 : :(4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct

Soit $ABCD$ un losange telque $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. I et J les milieux respectifs des segments $[AD]et$ $[DC]$.Soient E et F les points tesque $A = E * C$ et $D = F * C$

On désigne par G le centre de gravité du triangle CEF

1) On considère la similitude directe S telleque $S(E) = A$ et $S(C) = D$

a) Montrer que le rapport de S et $\frac{1}{2}$ et déterminer une mesure de l'angle de S

b) Montrer que G est le centre de S

c) Déterminer $S(A)$

d) Montrer que $S(B) = J$, en déduire que le triangle BJG est rectangle

2) Soit f la similitude indirecte telleque $f(E) = A$ et $f(F) = D$

a) Déterminer le rapport de f

b) Montrer que $f = S \circ S_{(ED)}$

c) Déterminer alors le centre de f

3) Soit K le milieu de $[EF]$

a) Montrer que $f(C) = K$

b) Soit Δ l'axe de f.Montrer que Δ est parallèle à (CB)

Exercice N°3 : :(6,5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-nx} ln(1 + e^x)$

On désigne par (C_n) la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A)1) Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - n\, ln(1 + e^x)$

a) Montrer que $g'_n(x) = \frac{e^x\,(1-n(1+e^x))}{(1+e^x)^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$

b) Dresser le tableau de variation de g_n puis donner le signe de g_n

2) a) Montrer que $f'_n(x) = e^{-nx}\, g_n(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{+\infty} f_n = 0$ pour $n \geq 2$

b) Dresser le tableau de variation de f_n (on distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$)

c)Etudier la position de (C_1) et (C_2)

d)Tracer (C_1) et (C_2) dans le même repère

B)Soit la fonction F_n définie sur $]0, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_0^{ln(x)} f_n(t)\, dt$, $(n \geq 1)$

1)a) Montrer que F_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F'_n(x) = \dfrac{ln(1 + x)}{x^{n+1}}$

b) En déduire que $F_n(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{ln(1 + t)}{t^{n+1}}\, dt$

c) Déterminer le sens de variation de F_n ainsi que son signe : ($F_n(1) = 0$)

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F_1(x) = ln(4) - \frac{ln(1+x)}{x} - ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$

(on remarque $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$)

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} F_1(x)$

3) On a tracé dans l'annexe ci-jointe la courbe (C') de $x \to ln(x)$

a) Montrer que $ln(1 + t) \leq t, \ \forall\, t > 0$

b) Etudier la position de (Γ_1)courbe de F_1 et de (C')

c) Construire dans l'annexe la courbe (Γ_1),et son asymptote.

4) a) Montrer que $\forall x > 0, on\ a: F_n(x) \leq F_1(x)$

b) Montrer que F_n admet une limite finie $en + \infty$ puis dresser son tableau de variation

Exercice N°4 : (5 points)

A)On considère dans Z^2 l'équation (E): $85x - 502y = 1$

1)a) Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans Z^2.

b) Vérifier que $(189{,}32)$ est une solution particulière de (E)

c) Résoudre dans Z^2 l'équation (E)

d) Déduire alors l'inverse de 85 $modulo$ 502

2) On considère le nombre premier 503. L'ensemble $H = \{n \in \mathbb{N}\ telque\ 0 \leq n \leq 502\}$ et l'application $f: H \to H$ qui à tout élément $n\ de\ H$ associe $f(n)$ où $f(n)$ est le reste de la division euclidienne de n^{85} par 503.

a) Montrer que pour $n \in H \setminus \{0\}, on\ a: n^{502} \equiv 1[503]$

b) Montrer que si $n\ et\ m$ sont deux éléments de H telsque $f(n) = f(m)$ alors $n = m$

c) Soit $n\ et\ m$ deux éléments de H tels que $f(n) = m$, Déterminer n en fonction de m

B)Soit P un nombre premier telque $P \equiv 5[6]$

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E'): $x^3 + y^3 = p(x \wedge y)(1 + x \vee y)$

Soit (x, y) une solution de (E').On pose $d = x \wedge y$

Soient $a\ et\ b$ les entiers naturels non nuls telsque $x = a\ d\ \ et\ y = b\ d$

1) a) Justifier $a \wedge b = 1\ et\ que\ d^2(a^3 + b^3) = p\ (1 + d\ a\ b)$

b) Déduire que $d = 1$

2) Montrer que $a \wedge p = 1\ et\ b \wedge p = 1$

3) Montrer que $a^3 \equiv -b^3\ [p]\ et\ a^{p-1} \equiv b^{p-1}[p]$

4)En déduire que $a \equiv -b[p]$ (on pourra écrire $p = 5 + 6k\ , k \in \mathbb{N}$)

5) On pose $a + b = Pu, u \in \mathbb{N}^*$

Montrer $u(a - b)^2 + (u - 1)ab = 1$ et déduire que $u(a - b)^2 = 1$

6) Montrer que $a + b = p\ et\ |a - b| = 1$ puis déduire les solutions de (E') lorsque $p = 503$