Les examens du baccalauréat

Section Mathématiques

2008 - 2022

MATHÉMATIQUES

ARITHMÉTIQUE

Dhaouadi Nejib

SIGMATHS

LES ANNALES DU BAC

Mai 2023

1. Bac 2022 Session Principale

Partie A

Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $19u + 11v = 1$.

1) a) Vérifier que $(-4, 7)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) a) Montrer que $u = 7$ est l'unique entier appartenant à $\{1,2,\dots,10\}$ tel que $19u \equiv 1 \pmod{11}$.

b) Montrer de même que v=7 est l'unique entier appartenant à $\{1,2,\dots,18\}$ tel que $11v \equiv 1$ (mod 19).

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_{209}) : $x^2 \equiv x \pmod{209}$.

Partie B

1) Vérifier que les entiers 0 et 1 sont des solutions de (E_{209}).

2) Décomposer 209 en produit de facteurs premiers.

3) Montrer que 133 et 77 sont des solutions de (E_{209}).

4) Soit x une solution de (E_{209}).

a) Montrer que 19 divise $x(x-1)$ et 11 divise $x(x-1)$.

b) Vérifier que x et (x-1) sont premiers entre eux.

5) Soit x une solution de (E_{209}) appartenant à $\{2,3,\dots,208\}$.

a) Montrer que 19 divise x ou 11 divise x.

b) On suppose que $x = 19k$ où k est un entier.

Montrer que 11 divise (x-1) puis déduire que $x = 133$.

c) On suppose que 11 divise x. Montrer que $x = 77$.

6) Déterminer les solutions de (E_{209}) appartenant à $\{0,1,\dots,208\}$.

Partie C

Soit y un entier et x son reste modulo 209.

1) Montrer que y est une solution de (E_{209}) si et seulement si x est une solution de (E_{209})

2) Donner alors les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_{209}).

2. Bac 2022 Session de Contrôle

Partie A

Soit p un nombre premier tel que p>3 et $p \equiv 2 \pmod 3$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_p) : $x^3 \equiv 1 \pmod p$.

1) Montrer que si $x \equiv 1 \pmod p$ alors x est une solution de (E_p).

2) Soit x une solution de (E_p).

   a) Montrer que $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

   b) En déduire que $x \equiv 1 \pmod p$.

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_p).

Partie B

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_{43}).

1) Montrer que $x^3 \equiv 1 \pmod{43}$ si et seulement si $x \equiv 1 \pmod{43}$ ou $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43}$.

   (On pourra remarquer que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.)

2) a) Vérifier que $(2x+1)^2 + 3 = 4(x^2 + x + 1)$ et que $30^2 \equiv -3 \pmod{43}$.

   b) Montrer que $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43}$ si et seulement si $(2x+1)^2 \equiv -3 \pmod{43}$.

   c) En déduire que :

   $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43} \Rightarrow (2x - 29) \equiv 0 \pmod{43}$ ou $(2x + 31 \equiv 0) \pmod{43}$.

3) a) Vérifier que 22 est un inverse de 2 modulo 43.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_{43}).

3. Bac 2021 Session Principale

1) a/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $21^n \equiv 1 + 20n \pmod{100}$

b/ En déduire les deux derniers chiffres de l'entier 2021^{2021}.

On note E l'ensemble des entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n \equiv 1 + n(x-1) \pmod{100}$.

2) Vérifier que 21 est un élément de E.

3) Soit x un élément de E.

a/ Montrer que $(x-1)^2 \equiv 0 \pmod{100}$.

b/ En déduire que $x \equiv 1 \pmod{10}$.

4) Soit $q \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + 10q)^n \equiv 1 + 10nq \pmod{100}$.

5) Déterminer l'ensemble E.

4. Bac 2021 Session de Contrôle

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

1) Déterminer les restes possibles modulo 6 de l'entier a^2.

2) Vérifier que $a^3 \equiv a \pmod{6}$.

3) a/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{2n+1} \equiv a \pmod{6}$.

b/ En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a^{2n} \equiv a^2 \pmod{6}$.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système $\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0 \pmod 6, \\ x^3y^2 \equiv 1 \pmod 6. \end{cases}$

5. Bac 2020 Session Principale

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

1) a) Justifier que pour tout entier naturel n, a_n est impair.

b) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste modulo 8 de 5^n.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1$ (mod 8).

2) a) Montrer que si $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 8 \\ x \equiv 7 \pmod{125} \end{cases}$ alors $x \equiv 257$ (mod 1000).

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $a_n \equiv 257$ (mod 1000).

c) Quelles sont les trois derniers chiffres de $\left(2 \times 5^{2020} + 7\right)\left(2 \times 5^{2021} + 7\right)$?

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.

b) Soit d le PGCD de a_{2n} et a_{2n+1}. Montrer que d est différent de 7.

c) Trouver alors d.

6. Bac 2020 Session de Contrôle

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et r le reste modulo 7 de k.

1) Montrer chacun des résultats suivants :

$k^3 \equiv 1$ (mod 7), si et seulement si, $r \in \{1, 2, 4\}$,

$k^3 \equiv 6 \pmod 7$, si et seulement si, $r \in \{3,5,6\}$,

$k^3 \equiv 0 \pmod 7$, si et seulement si, $r = 0$.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer les restes possibles modulo 7 de $x^3 + y^3$.

3) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $E_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, x^3 + y^3 = a\right\}$.

Montrer que les équations $x^3 + y^3 \equiv 3 \pmod 7$ et $x^3 + y^3 \equiv 4 \pmod 7$ n'admettent pas de solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

4) On considère l'ensemble E_{9990}. Supposons qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $(x,y) \in E_{9990}$.

a) Montrer alors que $x \equiv 0 \pmod 7$ ou $y \equiv 0 \pmod 7$.

b) Déterminer E_{9990}

7. Bac 2019 Session Principale

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $29x - 13y = 6$.

a) Vérifier que (2,4) est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $x^{19} \equiv -2\ [29]$.

2) Justifier que $2^{28} \equiv 1\ [29]$ et en déduire que -8 est solution de (E').

3) Soit x_0 une solution de (E').

a) Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que ${x_0}^{28} \equiv 1\ [29]$.

b) Montrer que ${x_0}^{57} \equiv -8\ [29]$ puis que $x_0 \equiv -8\ [29]$.

c) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E').

d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x-3)^{19} \equiv -2\ [29]$.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases}(x-3)^{19} \equiv -2\ [29] \\ (x-3)^{13} \equiv -2\ [13]\end{cases}$

8. Bac 2019 Session de Contrôle

Dans l'espace menu d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives $P_1 : 3x-2y-2z=1$ et $P_2 : 4x-11y+2z=0$.

1) a) Montrer que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ.

b) Donner une représentation paramétrique de Δ.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de déterminer les points de Δ à coordonnées entières.

2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 7x-13y=1$.

Vérifier que $(2,1)$ est une solution de (E) et résoudre l'équation (E).

3) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases}3x-2y-2z=1, \\ 4x-11y+2z=0.\end{cases}$

a) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Montrer que (x,y,z) est solution de (S) si et seulement si $\begin{cases}7x-13y=1, \\ 2z=11y-4x.\end{cases}$

b) En déduire l'ensemble des points de Δ à coordonnées entières.

9. Bac 2018 Session Principale

A) Soit q un entier naturel

1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair.

2) Montrer que si q est impair alors $q^2 \equiv 1 \pmod 8$.

B) On se propose de déterminer **l'ensemble A des triplets d'entiers naturels non nuls tels que $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$.**

1) Vérifier que le triplet $(2,1,5)$ est un élément de A.

Dans la suite de l'exercice on suppose que (m,n,q) est un élément de A.

2) a) Montrer que q est impair.

b) Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0 \pmod 8$.

c) Montrer alors que m est différent de 1.

3) On suppose que $m \geqslant 2$.

a) Justifier que les entiers $(q - 3^n)$ et $(q + 3^n)$ sont pairs.

b) Soit $d = (q - 3^n) \wedge (q + 3^n)$.

Montrer que d divise 2q et que d divise 2^{2m}. En déduire que $d = 2$.

c) Montrer que $q - 3^n = 2$ et que $q + 3^n = 2^{2m-1}$.

En déduire que $q = 2^{2m-2} + 1$ et que $3^n = 2^{2m-2} - 1$.

4) Déterminer n et q lorsque $m = 2$.

5) On suppose que $m \geqslant 3$.

a) Montrer que $3^n \equiv -1 \pmod{16}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel k, les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets (m,n,q) éléments de l'ensemble A tels que $m \geqslant 3$.

6) Déterminer l'ensemble A.

10. Bac 2017 Session Principale

1) Soit x un entier non nul premier avec 53.

   a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}

   b) En déduire que pour tout entier naturel k, $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$

2) Soit l'équation $(E_1) : x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$, où $x \in \mathbb{Z}$.

   Montrer que 2^9 est une solution de (E_1).

3) Soit x une solution de (E_1).

   a) Montrer que x est premier avec 53.

   b) Montrer que $x^{261} \equiv x \pmod{53}$.

   c) En déduire que $x \equiv 2^9 \pmod{53}$.

4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$.

   b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

5) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_2) : 71u - 53v = 1$.

   a) Vérifier que (3,4) est une solution de l'équation (E_2).

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

   c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases}$.

11. Bac 2016 Session Principale

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{2^4}$ et $a \equiv 1 \pmod{5^4}$. Montrer que $a \equiv 1 \pmod{10^4}$.

2) Soit $b = (9217)^4$. Montrer que $b \equiv 1 \pmod{5}$ et $b \equiv 1 \pmod{2^4}$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = b^{5^n} - 1$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^2 + 5b_n$.

4) a) Montrer que si 5^{n+1} divise b_n alors 5^{n+2} divise b_n^5.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $b_n \equiv 0 \left(\text{mod } 5^{n+1}\right)$.

5) a) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1$ (mod 625).

b) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1$ (mod 10000).

c) Trouver un entier dont le cube est congru à 9217 modulo 10000.

12. Bac 2016 Session de Contrôle

Soit a un entier naturel non nul et premier avec 5.

1) En utilisant les restes possibles de la division euclidienne de a par 5, $a^4 \equiv 1$ (mod 5).

2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant q$ et $q \equiv p$ (mod 4).

a) Montrer que $a^q \equiv a^p$ (mod 5)

b) Montrer que $a^q \equiv a^p$ (mod 2).

c) En déduire que $a^q \equiv a^p$ (mod 10).

3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $25x - 21y = 4$.

1) Vérifier que $(1,1)$ est une solution de (E).

2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

3) En déduire l'ensemble A des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

4) Soit (α,β) un élément de A. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et premier avec 5, n^α et n^β ont le même chiffre d'unité.

13. Bac 2014 Session Principale

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{10}$.

   a) Montrer que $a^9 + a^8 + \ldots + a + 1 \equiv 0 \pmod{10}$.

   b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$.

   (On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + \ldots + a + 1)$).

2) Soit b un entier.

   a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.

   b) En déduire que $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ si et seulement si b est premier avec 10.

3) Soit b un entier premier avec 10.

   a) Montrer que $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$.

   b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}.

14. Bac 2014 Session de Contrôle

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $1111x - 10^4y = 1$.

   a) Vérifier que $(-9, -1)$ est une solution de (E).

   b) Résoudre l'équation (E).

2) soit n un entier.

   a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 1 + q10^4$ alors (p,q) est une solution de (E).

   b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que $\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}$.

   c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

15. BAC 2013 SESSION DE CONTRÔLE

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E) : $2x + 5y = 6$.

1) a) Vérifier que $(3,0)$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit (x,y) une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$.

b) Déterminer les couples (x,y), solutions de (E), tels que $x \wedge y = 3$.

16. BAC 2012 SESSION DE CONTRÔLE

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$.

a) Montrer que le couple (9,-3) est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

17. BAC 2011 SESSION PRINCIPALE

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x \pmod 2$.

b) Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod{7}$.

c) Si $4x \equiv 10y \pmod{5}$ alors $x \equiv 0 \pmod{5}$.

d) Si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ y \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$

18. BAC 2010 SESSION PRINCIPALE

Répondre par "Vrai" ou "Faux". Aucune justification n'est demandée.

1) Le quotient de (-23) par (-5) est 4.

2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.

3) $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$.

4) $x^2 \equiv 0 \pmod{8}$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod{8}$.

5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \pmod{20}$.

6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

19. BAC 2010 SESSION DE CONTRÔLE

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.

2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.

3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2}$.

b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

20. Bac 2009 Session de Contrôle

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x+4y=-8$.

1) a) Vérifier que (0,-2) est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la droite Δ dont une équation est : $3x+4y+8=0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0.

a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.

b) Soit N un point de Δ de coordonnées (x,y).

Vérifier que $AN=\frac{5}{4}|x|$.

c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

21. Bac 2008 Session Principale

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x-8y=5$.

Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x,y) tels que $x=8k-1$ et $y=3k-1$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2) a) Soit n, x et y trois entiers tels que

$$\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$$

Montrer que (x,y) est une solution de (E).

b) On considère le système (S) $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 7 \pmod 3 \end{cases}$ où n est un entier.

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si

$n \equiv 23 \pmod{24}$.

3) a) Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier

$(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.