Exercice1

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10=9+1^2$; $13=9+2^2$ etc.
On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9=2^n$ où $a\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 4$.
   a. Montrer que si a existe, a est impair.
   b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.
2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9=3^n$ où $a\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$.
   a. Montrer que si $n\geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.
   b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.
   c. On pose $n=2p$ où p est un entier naturel, $p\geqslant 2$. Déduire d'une factorisation de 3^n-a^2, que l'équation proposée n'a pas de solution.
3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9=5^n$ où $a\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.
   a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.
   b. On pose $n=2p$, en s'inspirant de **2. c.** démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que a^2+9 soit une puissance entière de 5.

Exercice n°2

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier 4^n-1, lorsque n est un entier naturel.
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1}-1\equiv 0 \mod p$ ».

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28}-1$ est divisible par 29.
3. Pour $1\leqslant n\leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k}-1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre 4^n-1 est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28}-1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier
Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n\geqslant 1$ tel que $4^n\equiv 1 \mod p$.

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \mod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \mod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

   a. Démontrer que $4^r \equiv 1 \mod p$. En déduire que $r = 0$.

   b. Prouver L'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.

   c. En déduire que b divise $p - 1$.

Exercice n°3

1°)Montrer que pour tout entier relatif n les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2°)On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
Vérifier, en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux.
En déduire un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $87u + 31v = 1$, puis une solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E).

3°)Soit (E') l'équation $87x + 31y = 0$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Démontrer l'équivalence : $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow (x - x_0\ ;\ y - y_0)$ est solution de (E')

b) Résoudre l'équation (E').

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice n°4

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

   a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \quad [7]$ (soit modulo 7).

a	1	2	3	4	5	6
y						

   b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \quad [7]$ équivaut à $x \equiv 4 \quad [7]$.

   c. Si a est un élément de A, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \quad [7]$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On considère l'ensemble $A_p = \{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \quad [p]$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1 \quad [p]$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \quad [p]$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d. Application : $p = 31$.
Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1 \quad [31]$ et $3x \equiv 1 \quad [31]$.
À l'aide des résultats précédents résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation
$6x^2 - 5x + 1 = 0 \quad [31]$.

Exercice n°5

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S) \quad \begin{cases} n \equiv 13 & (19) \\ n \equiv 6 & (12) \end{cases}$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2. **a.** Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à

$$\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$$

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$.

3. **a.** Trouver un couple $(u\ ;\ v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?