Épreuve : Suites

Série d'exercices

♣♣♣♣♣

2ème sciences

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0

1°) Calculer U_5 sachant que $U_0 = 5$ et $q = \frac{1}{2}$

2°) Calculer U_0 sachant que $U_8 = 162$ et $q = \sqrt{3}$

3°) Calculer q sachant que $U_2 + U_4 = 108$ $U_3 = 24$

Solution

1) $U_5 = U_0 q^5 = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$

2) $U_8 = U_0 q^8 \iff U_0 = \frac{U_8}{q^8} = \frac{162}{(\sqrt{3})^8} = \frac{162}{3^4} = \frac{162}{81} = 2$

3) $\begin{cases} U_3 = 24 \\ U_2 + U_4 = 108 \end{cases} \iff \begin{cases} U_3 = 24 = qU_2 \\ U_2 + qU_3 = 108 \end{cases} \iff \begin{cases} U_3 = 24 \text{ et } U_2 = \frac{24}{q} \\ U_2 + qU_3 = 108 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} U_3 = 24 \text{ et } U_2 = \frac{24}{q} \\ \frac{24}{q} + 24q = 108 \end{cases}$

$\frac{24}{q} + 24q = 108 \iff 24q^2 - 108q + 24 = 0 \iff 12\left(2q^2 - 9q + 2\right) = 0 \iff 2q^2 - 9q + 2 = 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 65$ donc $q = \frac{9 + \sqrt{65}}{4}$ ou $q = \frac{9 - \sqrt{65}}{4}$

Exercice 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 tel que $u_2 = -1$ et $u_7 = -16$

1) *Montrer que $r = -3$ et $u_0 = 5$*

2) *Exprimer u_n en fonction de n*

3) *Calculer u_{18}*

4) *Calculer $S = u_2 + u_3 + \dots\dots\dots + u_{18}$*

Solution

Rappel : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors :

- Pour tout entier n; $u_n = u_0 + nr$
- Pour tout entiers naturels p et q : $u_p = u_q + (p-q)r$
- Pour tout entiers naturels n et m tels que : $n \leqslant m$; $\sum_{k=n}^{m} u_k = \frac{m-n+1}{2}(u_n + u_m)$

1) $u_7 = u_2 + (7-2)r \iff r = \frac{u_7 - u_2}{7-2} \iff r = \frac{-16-(-1)}{5} \iff \boxed{r=-3}$

$u_2 = u_0 + 2r \iff u_0 = u_2 - 2r \iff \boxed{u_0 = -1 - 2(-3) = 5}$

2) Pour tout entier naturel n; $u_n = u_0 + nr \iff \boxed{u_n = 5 - 3n}$

3) $u_{18} = 5 - 3 \times 18 = -49$

4) $S = u_2 + u_3 + ... + u_{18} \iff S = \sum_{k=2}^{18} u_k \iff S = \frac{18-2+1}{2}(u_2 + u_{18})$

$\iff S = \frac{17}{2}(-1-49) = -425$

Exercice 3

Soit U_n une suite arithmétique telle que $U_5 = 16 \quad et \; U_{10} = 31$

1- Calculer la raison r et son premier terme U_0

2- Trouver la terme générale de U_n

3- Calculer la somme S=U_5+U_6+...+U_{10}

Solution

Rappel : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors :

- Pour tout entier n; $u_n = u_0 + nr$
- Pour tout entiers naturels p et q : $u_p = u_q + (p-q)r$
- Pour tout entiers naturels n et m tels que : $n \leqslant m$; $\sum_{k=n}^{m} u_k = \frac{m-n+1}{2}(u_n + u_m)$

1)

- $u_{10} = u_5 + (10-5)r \iff r = \frac{u_{10} - u_5}{10-5} \iff r = \frac{31-16}{5} = 3$

◈ $u_5 = u_0 + nr \iff 16 = u_0 + 5 \times 3 \iff u_0 = 16 - 15 = 1$

2) Pour tout entier naturel n; $u_n = u_0 + nr \iff \boxed{u_n = 1 + 3n}$

3) $S = \sum_{k=5}^{10} u_k = \frac{10-5+1}{2}(u_5 + u_{10}) \iff S = 3(16+31) = 141$

Exercice 4

Soit U une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.

1) Calculer r et U_0 sachant que $U_4 = 13$ et $U_9 = 28$.
2) Déterminer l'entier n tel que $U_n = 61$.
3) On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1}$.

   a/ Montrer que $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$.

   b/ Calculer la somme : $S = 1 + 4 + 7 + \cdots + 58 + 61$.

Solution

1) $U_9 = U_4 + (9-4)r \iff r = \frac{U_9 - U_4}{5} = \frac{28-13}{5} = 3$

$U_4 = U_0 + 4r \iff U_0 = U_4 - 4r = 13 - 12 = 1$

2) $U_n = 61 \iff U_0 + nr = 61 \iff 1 + 3n = 61 \iff 3n = 60 \iff n = \frac{60}{3} = 20$

3) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$

a/ $S_n = \frac{n-1-0+1}{2}(U_0 + U_{n-1}) \iff S_n = \frac{n}{2}(1 + 1 + 3(n-1))$

$\iff S_n = \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$

b/

$$\begin{aligned}
&1 + 4 + 7 + \ldots + 58 + 61 \\
&= (1 + 3\times 0) + (1 + 3\times 1) + (1 + 3\times 2) + \ldots + (1 + 3\times 19) + (1 + 3\times 20) \\
&= \sum_{k=0}^{20}(1+3k) = \sum_{k=0}^{20} U_k \\
&= \frac{20-0+1}{2}(U_0 + U_{20}) \\
&= \frac{21}{2}(1+61) = 21 \times 31 = 651
\end{aligned}$$

Exercice 5

1- Soit (U_n) une suite arithmétique telle que : $U_8 = 41$ *et* $U_5 = 11$.

Déterminer la raison r et le premier terme U_0 .

2- (U_n) une suite arithmétique telle que :

$U_2 = 5$ et $U_1 + U_2 + \dots\dots\dots\dots U_7 = 56$

Déterminer U_0 et la raison r .

Solution

1) $U_8 - U_5 = (8-5)r \iff r = \dfrac{U_8 - U_5}{8-5} = \dfrac{41-11}{3} = 10 \iff \boxed{r = 10}$

$U_5 = U_0 + 5r \iff U_0 = U_5 - 5r = 11 - 50 = -39 \iff \boxed{U_0 = -39}$

2)

◈ $U_1 + U_2 + \dots + U_7 = 56$

$$\iff \frac{7-1+1}{2}(U_1 + U_7) = 56$$
$$\iff \frac{7}{2}[(U_0 + r) + (U_0 + 7r)] = 56$$
$$\iff \frac{7}{2}(2U_0 + 8r) = 56$$
$$\iff 7(U_0 + 4r) = 56$$
$$\iff U_0 + 4r = 8$$

◈ $U_2 = 5 \iff U_0 + 2r = 5$

$$\begin{cases} U_0 + 4r = 8 \\ U_0 + 2r = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_0 + 4r) - (U_0 + 2r) = 8 - 5 \\ U_0 + 2r = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2r = 3 \\ U_0 = 5 - 2r \end{cases} \iff \begin{cases} r = \dfrac{3}{2} \\ U_0 = 5 - 3 = 2 \end{cases}$$

Exercice 6

Soit U une suite géométrique définie sur IN telle que :

$U_3 = 2$ et $U_{10} = 4374$.

1) Calculer la raison de cette suite.

2) Calculer la somme : $A = U_0 + U_1 + \cdots U_{10}$.

Solution

1) $U_{10} = U_3 q^{10-3} = U_3 q^7 \iff q^7 = \dfrac{U_{10}}{U_3} \iff q^7 = \dfrac{4374}{2} = 2187 = 3^7 \iff q = 3$

2) $U_3 = U_0 q^3 = U_0 \times 3^3 \iff 2 = 27U_0 \iff \boxed{U_0 = \dfrac{2}{27}}$

$A = U_0 \dfrac{1 - q^{10-0+1}}{1-q} \iff A = \dfrac{2}{27} \times \dfrac{1 - 3^{11}}{1-3} \iff A = \dfrac{3^{11} - 1}{27} = \dfrac{177146}{27}$

Exercice 7

Soit la suite U definie sur IN *par* $\begin{cases} U_0 &= 0 \\ U_{n+1} &= -2U_n + 1 \end{cases}$

Soit la suite (V_n) définie sur IN $V_n = 3\ U_n - 1$

1- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .

2- calculer la somme $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_6$

Solution

1) $V_{n+1} = 3U_{n+1} - 1 = 3(-2U_n + 1) - 1 = -6U_n + 2 = -2(3U_n - 1) = -2V_n$

$V_{n+1} = -2V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme

$V_0 = 3U_0 - 1 = -1$

2) $S = \sum_{k=0}^{6} V_k = V_0 \dfrac{1-(-2)^{6-0+1}}{1-(-2)} = -\dfrac{1-(-2)^7}{3} = -\dfrac{1+2^7}{3} = -43$

Exercice 8

On considère la suite $(V_n)_{n \in IN}$ définie par : $V_n = \dfrac{3n+2}{n+4}$.

1) Calculer V_0, V_1, V_2, V_{46} et V_{96}.

2) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $\dfrac{1}{2} \le V_n < 3$.

Solution

$$V_n = \frac{3n+2}{n+4}$$

1) ◇$V_0 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

◇$V_1 = \dfrac{3+2}{1+4} = 1$

◇$V_2 = \dfrac{6+2}{2+4} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

◇$V_{46} = \dfrac{3\times 46+2}{46+4} = \dfrac{140}{50} = \dfrac{14}{5} = 2,8$

◇$V_{96} = \dfrac{3\times 96+2}{96+4} = \dfrac{290}{100} = \dfrac{29}{10} = 2,9$

2) $V_n = \dfrac{3n+2}{n+4} = \dfrac{3(n+4)-10}{n+4} = 3 - \dfrac{10}{n+4}$ 👍

$n+4 \geqslant 4 \iff 0 < \dfrac{1}{n+4} \leqslant \dfrac{1}{4} \iff -\dfrac{10}{4} \leqslant -\dfrac{10}{n+4} < 0 \iff 3 - \dfrac{10}{4} \leqslant 3 - \dfrac{10}{n+4} < 3$

$\Longleftrightarrow \dfrac{2}{4} \leqslant V_n < 3 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant V_n < 3$

Exercice 9

Soit V la suite définie sur IN par : $V_n = \dfrac{1}{2^n}$.

1) Montrer que V est une suite géométrique.
2) On pose : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$.

   Montrer que, pour tout $n \in IN$, $S_n = \dfrac{2^n - 1}{2^{n-1}}$.
3) Calculer la somme : $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{1024}$.

Solution

1) $V_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2 \times 2^n} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2} V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

2)

$$V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$$

$$= V_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2\frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$$

3)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1024}$$

$$= \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{10}}$$

$$= \sum_{k=0}^{10} V_k = \frac{2^{11} - 1}{2^{10}} \text{ ; On prend n=11 dans 2)}$$

$$= \frac{2047}{1024}$$

Exercice 10

Soit (W_n) une suite géométrique tel que : $W_3 = 2$ et $W_{10} = 4374$

1) Calculer la raison q de cette suite.
2) Calculer : $S = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_{10}$

Solution

1) Soit q la raison de cette suite.

$$W_{10} = W_3 q^{10-3} \iff W_{10} = W_3 q^7 \iff q^7 = \frac{W_{10}}{W_3} = \frac{4374}{2} \iff q^7 = 2187 = 3^7 \iff \boxed{q = 3}$$

2) $W_3 = W_0 q^3 \iff W_0 = \dfrac{W_3}{q^3} = \dfrac{2}{27}$

$$S = W_0 + W_1 + \ldots + W_{10} = \sum_{k=0}^{10} W_k$$

$$= W_0 \frac{1-q^{10-0+1}}{1-q} = \frac{2}{27} \times \frac{1-3^{11}}{-2} = \frac{1}{27}\left(3^{11}-1\right) = \frac{177\,146}{27}$$

Exercice 11

Soit U la suite définie sur IN par $U_0=3$ et $U_{n+1}=U_n-4n+1$

1) Vérifier que U n'est pas une suite arithmétique.

2) Soit V la suite définie sur IN par $V_n=U_{n+1}-U_n$.
 Montrer que la suite V est une suite arithmétique dont on précisera la raison

Solution

(U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = U_n - 4n + 1$

1) ◈ $U_1 = U_0 - 4 \times 0 + 1 = 3 - 0 + 1 = 4$

◈ $U_2 = U_1 - 4 \times 1 + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$

$$\begin{cases} U_1 - U_0 = 4 - 3 = 1 \\ U_2 - U_1 = 1 - 4 = -3 \end{cases}$$

$U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$ donc la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

2) $V_n = U_{n+1} - U_n = (U_n - 4n + 1) - U_n = -4n + 1$

$V_{n+1} - V_n = (-4(n+1)+1) - (-4n+1) = -4n - 4 + 1 + 4n - 1 = -4$ donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = -4$

Exercice 12

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_0 est de raison r .

-1- sachant que : r $= \frac{3}{2}$ et de $U_4 = \frac{13}{2}$ calculer U_0 et U_{11} .

-2- sachant que : $U_6 = 1$ *et* $U_{12} = -1$ *calculer r* .

-3- sachant que : $U_2 = 4$ et $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_7 = 68$

calculer r et U_0 .

Solution

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.

1) $r = \dfrac{3}{2}$ et $U_4 = \dfrac{13}{2}$

◈$U_4 = U_0 + 4r \iff U_0 = U_4 - 4r = \dfrac{13}{2} - 4 \times \dfrac{3}{2} \iff U_0 = \dfrac{13-12}{2} = \dfrac{1}{2}$

◈$U_{11} = U_0 + 11r \iff U_{11} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{33}{2} = 17$

2) $U_6 = 1$ et $U_{12} = -1$

$U_{12} = U_6 + (12-6)r \iff r = \dfrac{U_{12} - U_6}{6} \iff r = \dfrac{-1-1}{6} = -\dfrac{1}{3}$

3) $U_2 = 4$ et $U_0 + U_1 + \ldots + U_7 = 68$

◈$U_0 + U_1 + \ldots + U_7 = 68 \iff \dfrac{7-0+1}{2}(U_0 + U_7) = 68 \iff 4(U_0 + U_0 + 7r) = 68$

$\iff 2U_0 + 7r = 17$

◈$U_2 = 4 \iff U_0 + 2r = 4$

$$\begin{cases} 2U_0 + 7r = 17 \\ U_0 + 2r = 4 \end{cases} \begin{cases} 2U_0 + 7r = 17 \\ 2U_0 + 4r = 8 \end{cases} \begin{cases} 2U_0 + 7r = 17 \\ 3r = 9 \end{cases} \begin{cases} r = 3 \\ U_0 = \dfrac{17-7r}{2} = \dfrac{17-21}{2} = -2 \end{cases}$$

Exercice 13

Soit (V_n) une suite géométrique tel que $V_5 = -160$ *et* $V_{10} = 5120$

1) Déterminer la raison q de cette suite.

2) Déterminer le premier terme V_0 de cette suite.

3) Exprimer V_n en fonction de n.

4) Calculer la somme S $= V_5 + V_6 + V_7 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. + V_{10}$.

Solution

(V_n) est une suite géométrique telle que $V_5 = -160$ et $V_{10} = 5120$

1) $V_{10} = V_5 q^{10-5} \iff V_{10} = V_5 q^5 \iff q^5 = \dfrac{V_{10}}{V_5} = \dfrac{5120}{-160} = -32$

$\iff q^5 = (-2)^5 \iff \boxed{q = -2}$

2) $V_5 = V_0 q^5 \iff V_0 = \dfrac{V_5}{q^5} \iff V_0 = \dfrac{-160}{(-2)^5} = \dfrac{-160}{-32} = 5$

3) $V_n = V_0 q^n \iff V_n = 5(-2)^n$

4) $S = V_5 + V_6 + V_7 + \ldots + V_{10} = \sum_{k=5}^{10} V_k = V_5 \dfrac{1 - q^{10-5+1}}{1-q} \iff S = -160 \times \dfrac{1-(-2)^6}{1-(-2)}$

$\iff S = 160 \times \dfrac{2^6 - 1}{3} = 160 \times 21 = 3360$