Les examens du baccalauréat

Section Mathématiques

2006 - 2021

MATHÉMATIQUES

SIMILITUDES

SIGMATHS

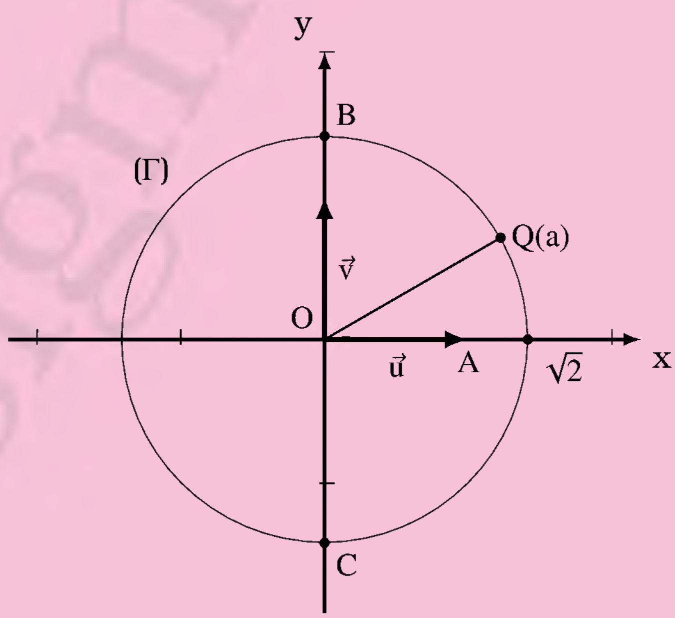
LES ANNALES DU BAC

Dhaouadi Nejib

1. Bac 2020 session principale

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Dans la figure ci-dessous, (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, A, B et C sont les points d'affixes respectives $1, i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.
Soit Q un point de (Γ) d'affixe un nombre complexe a, distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

1. On désigne par R le point d'affixe $a + \bar{a}$.
   a. Vérifier que $R \in (O, \vec{u})$. Construire R.
   b. Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O, R et Q sont alignés.
2. Soit P le point du plan d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.
   a. Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire P.
   b. Montrer que A, P et M sont alignés$\Leftrightarrow (i\bar{a} + 1)z - (ia - 1)\bar{z} = i(a + \bar{a})$
   c. Montrer que $(AP)\perp(OM) \Leftrightarrow (i\bar{a} + 1)z - (ia - 1)\bar{z} = 0$
   d. Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP). On désigne par Z_H l'affixe du point H.
   Justifier que $Z_H = \dfrac{i(a + \bar{a})}{2(i\bar{a} + 1)}$
3. Soit N le point d'affixe $Z_N = \dfrac{a + \bar{a}}{i\bar{a} + 1}$
   a. Vérifier que N est l'image de H par une similitude que l'on déterminera.
   b. Construire le point N. Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle (Γ) privé des points B et C.

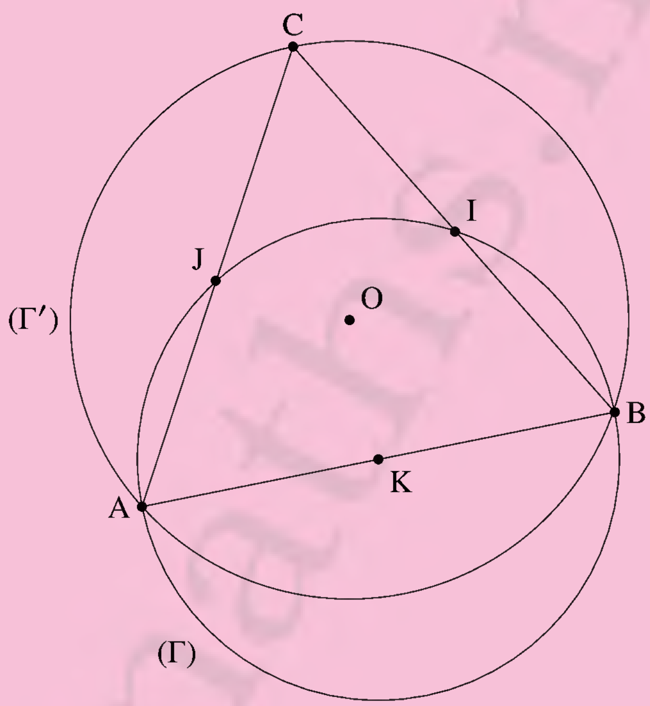


2. Bac 2020 session de contrôle

Le plan est orienté.
Dans la figure de l'annexe jointe, ABC est un triangle équilatéral direct de centre O. I, J et K sont les milieux respectifs des cotés [BC], [AC] et [AB].
Soit S la similitude directe de centre B et telle que $S(J) = C$.

1. Déterminer l'angle de S et montrer que son rapport est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
2. Soit (Γ) le cercle de diamètre [AB] et (Γ') le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a. Montrer que $S(K) = O$.
   b. En déduire que $S(\Gamma) = \Gamma'$.
   c. Déterminer et construire le point $A' = S(A)$.
3. La droite (OC) coupe (Γ') en P et la droite (BP) recoupe (Γ) en Q.
   On note S^{-1} l'application réciproque de S.
   a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de S^{-1}.
   b. Montrer que $S^{-1}(A) = Q$.
   c. Quelle est la nature du triangle BJQ ?
   d. Prouver que K est le milieu du segment [QI].
4. Soit $\varsigma = SoS_{AB}$ où S_{AB} est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
   a. Justifier que ς est une similitude indirecte et déterminer ses éléments caractéristiques.
   b. Déterminer $\sigma(Q)$ et $\sigma(J)$.
   c. La droite (IJ) coupe la droite (QB) en un point M.
   Déterminer et construire le point $M' = \sigma(M)$

Annexe



3. Bac 2019 session principale

Le plan est menu d'un repère orthonormé direct. Dans la figure ci-dessous, (C) est le cercle de centre O et de diamètre [BC], M est le point de [BC] tel que $CM = \frac{1}{3}BC$ et (C') est le cercle de diamètre [CM]. I et I' sont les milieux respectifs des segments [BM] et [CM]. A et A' sont deux points du cercle (C) tels que AMA'B est un losange et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. La droite (AC) recoupe le cercle (C') en H.

1) a) Montrer que les droites (AB) et (HM) sont parallèles.

b) En déduire que les points H, M et A' sont alignés.

c) Montrer que $HM = \frac{1}{3}AB$ et que $HA^2 = AB^2 - HM^2$.

2) On désigne par S la similitude directe de centre H qui envoie A en M.

a) Préciser l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

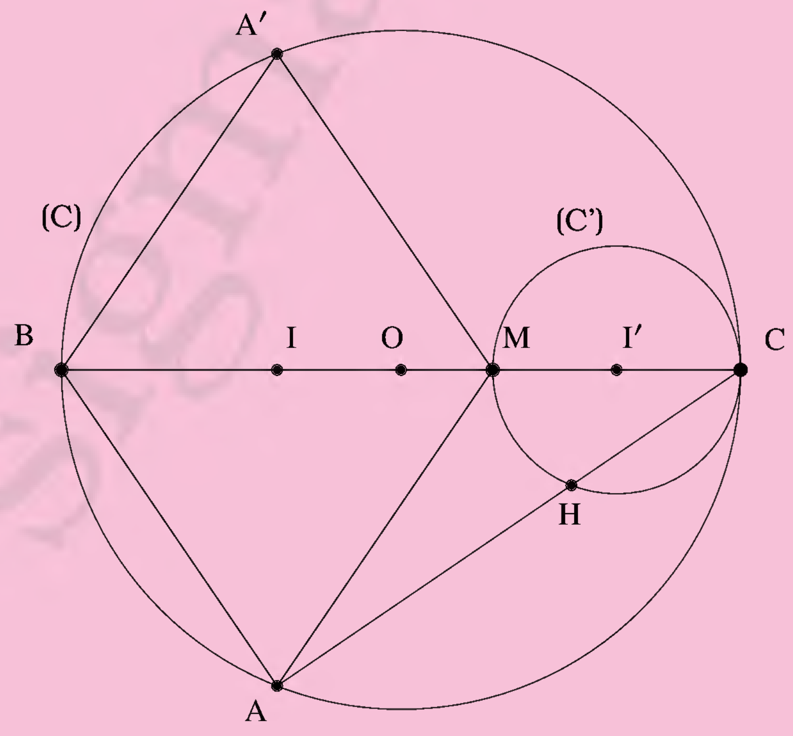
b) Déterminer les images par S des droites (AI) et (MH). En déduire $S(A')$.

3) On pose $S' = S_{(AH)} o S o S_{(AH)}$.

a) Vérifier que S' est une similitude directe dont précisera le centre et le rapport.

b) La droite (A'M) recoupe le cercle (C) en N. Montrer que le triangle MCN est isocèle de sommet principal C.

c) Déterminer $S'(A)$. En déduire alors l'angle de S'.



4. Bac 2019 session de contrôle

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $R(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points I, C, D et K d'affixes respectives 1+i, 1+2i, 2i et 3i.

1) a) Placer les points I, C, D et k dans le repère R.

   b) Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte g qui transforme I en D et D en K.

   c) Déterminer le rapport de g.

   d) Déterminer l'image du triangle IDO.

2) Soit M un point du plan et M' son image par g.
   On désigne par z et z' les affixes respectives de M et M'.

   a) Montrer que $z' = -\frac{1}{2}(1+i)\overline{z} + 1 + 2i$.

   b) Soit Ω le centre de g. Déterminer l'affixe de Ω.

   c) Vérifier que K est le milieu de [ΩI].

   d) Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.

3) Soit h=gog.

   a) Montrer que h est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.

   b) On considère la suite des points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $A_0 = I$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_{n+1} = h(A_n)$
   Déterminer et construire les points A_2 et A_4.

   c) Soit $S = A_0A_2 + A_2A_4 + ... + A_{2n-2}A_{2n}$.
   Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

5. Bac 2018 session principale

Le plan est orienté. Dans la figure ci-dessous,

— DBC est un triangle rectangle en D tel que $\widehat{(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $DB = 2DC$;

— le point H est le milieu du segment [DB] ;

— le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC) ;

— le point E est le milieu du segment [ID] ;

— les droites (IH) et (CD) se coupent au point A.

1) Soit R la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer $\tan\widehat{CBD}$. En déduire que $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$.

b) Montrer alors que $R(I) = E$.

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$.

a) Déterminer $f(H)$.

b) Montrer que $f(I) = I$.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

d) Montrer que $f(C) = A$.

3) a) La droite (CH) coupe la droite (AB) en un point F.
Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre [BH].
En déduire que $\widehat{(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IF})} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

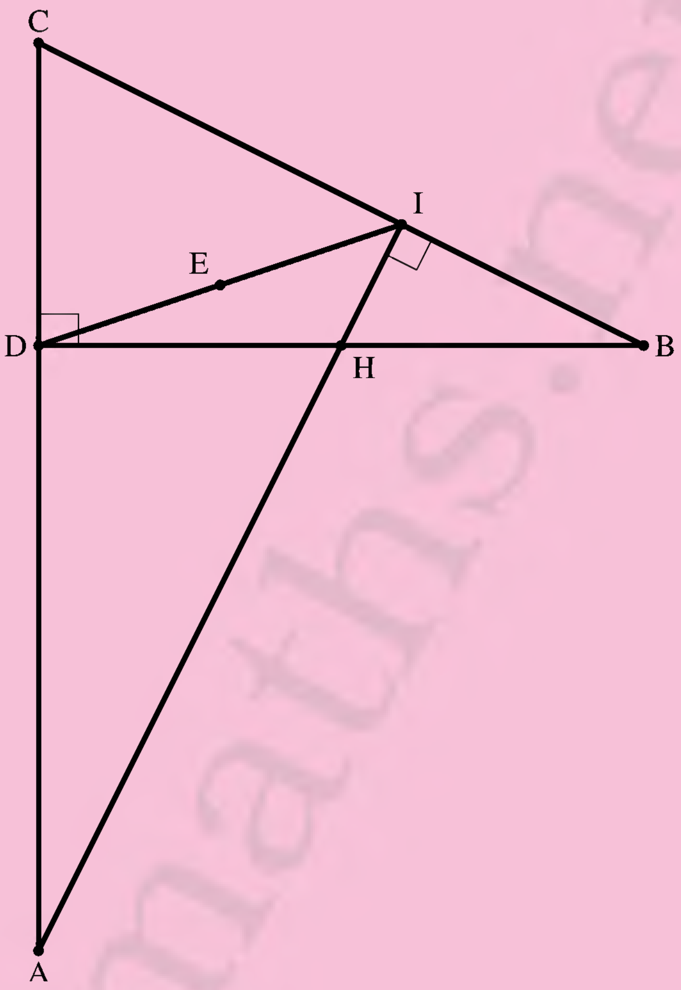
b) Montrer alors que l'image par f de la droite (ID) est la droite (IF).

c) La droite (ID) coupe les droites (CF) et (AB) respectivement en J et Ω. Montrer que $f(J) = F$.

d) Montrer que $f(F) = \Omega$.

4) Montrer que le triangle $CA\Omega$ est rectangle.

Figure



6. Bac 2018 session de contrôle

Le plan est orienté. Dans la Figure ci-dessous,

— ABC est un triangle équilatéral direct tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$;

— $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre ;

— I est le milieu du segment [BC] ;

— AICD est un rectangle direct.

1) Soit f le déplacement tel que $f(A) = C$ et $f(B) = A$.
Montrer que f est une rotation dont on précisera son centre et une mesure de son angle.

2) Soit g l'antidéplacement tel que $g(A) = C$ et $g(B) = A$.

   a) Justifier que g est une symétrie glissante.

   b) Montrer que $g = t_{\overrightarrow{BI}} o S_{\Delta}$, où Δ est la médiatrice du segment [AI].

3) Soit h l'homothétie de centre A et telle que $h(O) = I$. On pose $\varphi = g o h o f$.

   a) Montrer que φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{3}{2}$.

   b) Montrer que $\varphi(B) = C$ et $\varphi(O) = D$.

4) Soit $E = \varphi(C)$.

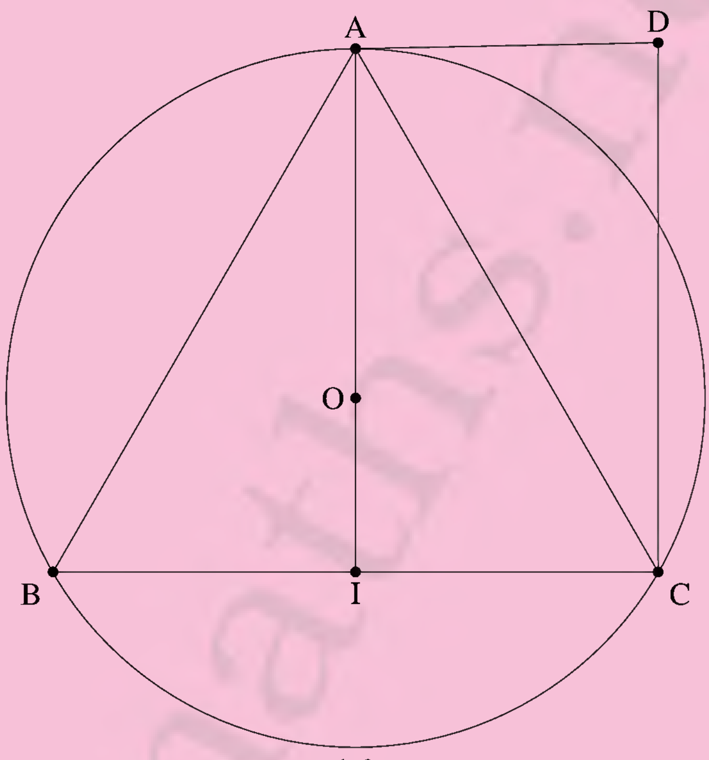
   a) Montrer que le triangle DCE est isocèle en D.

   b) Justifier que $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

   c) Construire alors le point E.

   d) Soit Ω le centre de φ.
   Montrer que $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$. Construire le point Ω.

5) On pose $\mathscr{C} = \varphi(\mathscr{C})$.
Le cercle $\mathscr{C}$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ au point C et un autre point M. On pose $N = \varphi(M)$.
Montrer que les points Ω, B et M sont alignés. Construire alors le point N.


A
D
O
B
I
C
$(\mathscr{C})$

7. Bac 2017 session principale

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe.

ABC est un triangle équilatéral tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Ω est un point intérieur au triangle ABC tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

I et J sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC).

D est le point de la droite (AC) tel que $DA = D\Omega$.

1) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega D}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

2) Soit $R = S_{(\Omega D)} o S_{(\Omega J)}$

   a) Justifier que R est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

   b) Soit $F = R(J)$.
   Montrer que F est un point de la demi-droite $[\Omega\ I)$. Construire le point F.

3) Soit h l'homothétie de centre Ω telle que $h(F) = I$. On pose $f = hoR$.

   a) Vérifier que $f(J) = I$.

   b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

   c) Calculer $\frac{\Omega I}{\Omega A}$ et $\frac{\Omega A}{\Omega J}$. $\left(\text{On donne } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$.
   En déduire que le rapport de f est égal à $1+\sqrt{3}$.

4) Soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J) = I$.

   a) Montrer que $g = foS_{(\Omega J)}$.

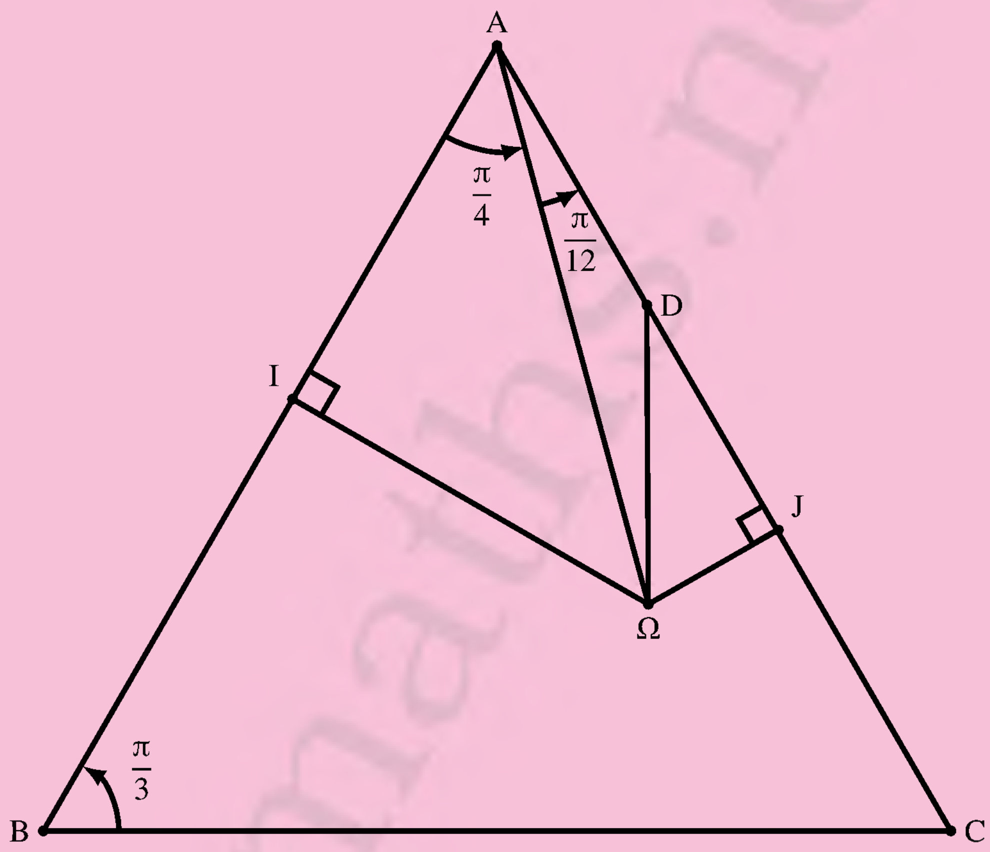
   b) Déterminer le rapport de g.

   c) Montrer que l'axe de g est la droite (ΩD).

   d) Montrer que $g = hoS_{(\Omega D)}$.

   e) La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en un point K. On pose $K' = g(K)$.
   Vérifier que $h(K) = K'$. Construire alors le point K'.

Annexe 1 : Figure 1



8. Bac 2017 session de contrôle

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, ABC est un triangle direct tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Les points I, J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A, B et C. Le point E est le milieu du segment [AC].

1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.

2) Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
On note Δ est la médiatrice du segment [IE] et on pose $f = SoS_{\Delta}$.

   a) Montrer que $S(I) = B$. En déduire que $f(E) = B$.

   b) Montrer que f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

   c) Caractériser fof. En déduire que $f(B) = C$.

   d) Montrer que l'image par f de la droite (BJ) est la droite(CK). En déduire que $f(J) = K$.

3) Soit g la similitude indirecte telle que $g(C) = A$ et $g(K) = I$.

   a) En remarquant que le triangle BCK est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point B est le centre de g.

   b) On pose $D = g(A)$. Montrer que le point D appartient à la droite (BI).

   c) Justifier que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Construire alors le point D.

4) On pose $\varphi = gof$.

   a) Montrer que φ est une similitude directe. Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$.

   b) Montrer qu'une mesure de l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$.

5) Soit Ω le centre de φ.

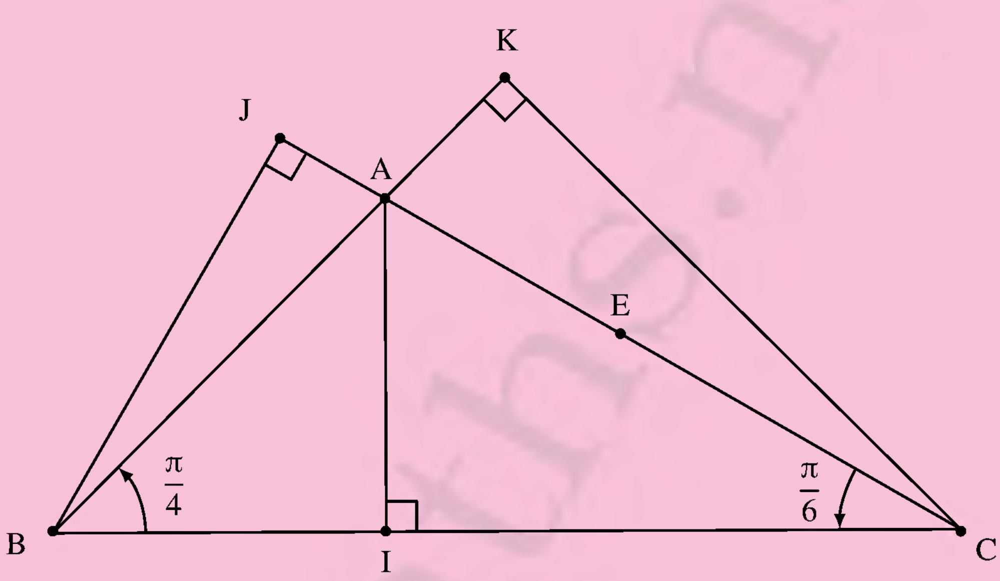
   a) Vérifier que $D = \varphi o \varphi o \varphi(E)$. En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega D}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

   b) On pose $F = \varphi o \varphi o \varphi(J)$. Montrer que les droites (FD) et (JE) sont perpendiculaires.

   c) Vérifier que $F = \varphi o \varphi(I)$. En déduire que $IB = IE$, montrer que $FD = FA$.

   d) Construire le point F. En déduire une construction du point Ω.

Annexe 1 : Figure 1



9. Bac 2016 session principale

Le plan est orienté. Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle direct, rectangle en A tel que AB < AC.
La médiatrice du segment [BC] coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en E, F et G.

1) Soit f la similitude directe de centre A et telle que f(B)=F.

   a) Déterminer l'angle de f.

   b) Montrer que l'image de la droite (BC) par f est la droite (GF).

   c) Déterminer f(C).

2) Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC] et le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [EF] se coupent en A et H.

   a) Montrer que $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.

   b) Soit I=f(H). Construire le point I.

   c) Montrer que le quadrilatère HEIF est un rectangle.

   d) La droite (FI) coupe la droite (AE) en un point J. Montrer que f(F)=J.

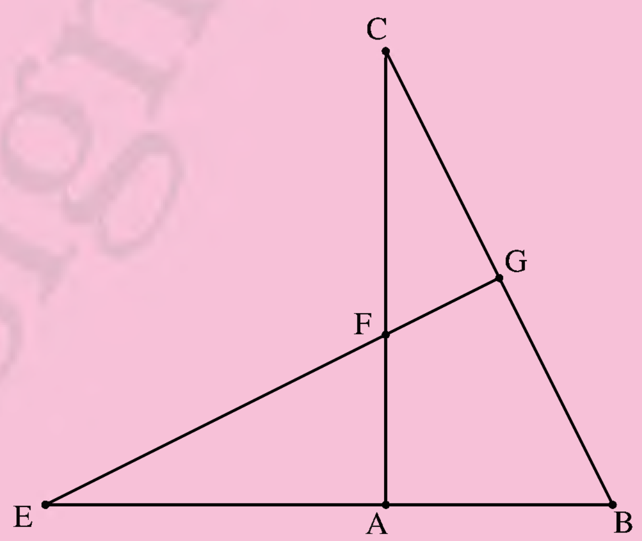
3) Soit g la similitude indirecte de centre A et telle que g(B)=F.

   a) Montrer que $g = S_{(AC)} \text{o} f$.

   b) Soit E'=f(E). Montrer que E' est un point de la droite (AC).

   c) Soit F'=g(F) et H'=g(H). Construire l'image par g du rectangle FHEI.

Annexe : Figure 1



10. Bac 2016 session de contrôle

Le plan est orienté.

Dans la figure ci-dessous ABCD est un rectangle direct de centre O.

AOID et OCID sont deux losanges. Le point J est le milieu du segment [CD] et le point L est le milieu du segment [BC].

1) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   a) Déterminer R(O) et R(D).

   b) Montrer que R(A)=B.

2) Soit $g = S_{(OL)} o S_{(OI)} o S_{(AD)}$.

   a) Vérifier que g(A)=C et g(D)=B.

   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

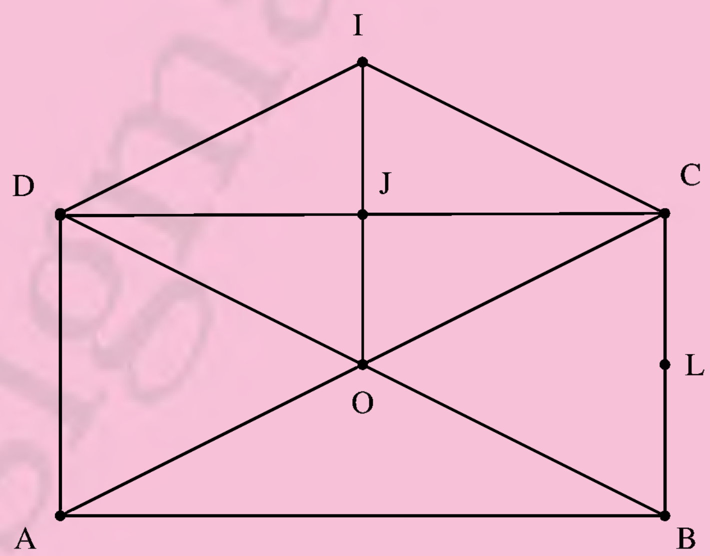
3) Soit h l'homothétie de centre le point C et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose $\varphi = Rohog^{-1}$.

   a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

   b) Soit K le milieu du segment [IC]. Montrer que φ(B)=K.

   c) Montrer que $\varphi = hoS_{(AC)}$.

4) Déterminer l'image par φ du rectangle ABCD.



11. Bac 2015 session principale

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

1) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.

2) Soit g la similitude directe de centre A qui envoie C sur B.

   a) Déterminer le rapport de g.

   b) Déterminer l'axe Δ de g.

   c) Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
   Montrer que g(B)=D et en déduire que [BD) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$.

3) a) Montrer que fog est une symétrie axiale et préciser son axe.

   b) On pose D'=f(D). Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à A.

4) La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAD'}$ coupe la droite (CD') en un point J.
   Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Déterminer f(I).

12. Bac 2015 session de contrôle

Le plan est orienté. Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [AB].

1) Soit f la similitude directe qui A sur B et I sur O.

   a) Justifier que f est d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

   b) Déterminer le centre de f.

2) La droite (CJ) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en E et soit H le projeté orthogonal du point B sur (AE).

   a) Justifier que E est le milieu du segment [AH] et en déduire que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = -EA^2$.

   b) Montrer d'autre part que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}EA.EB$

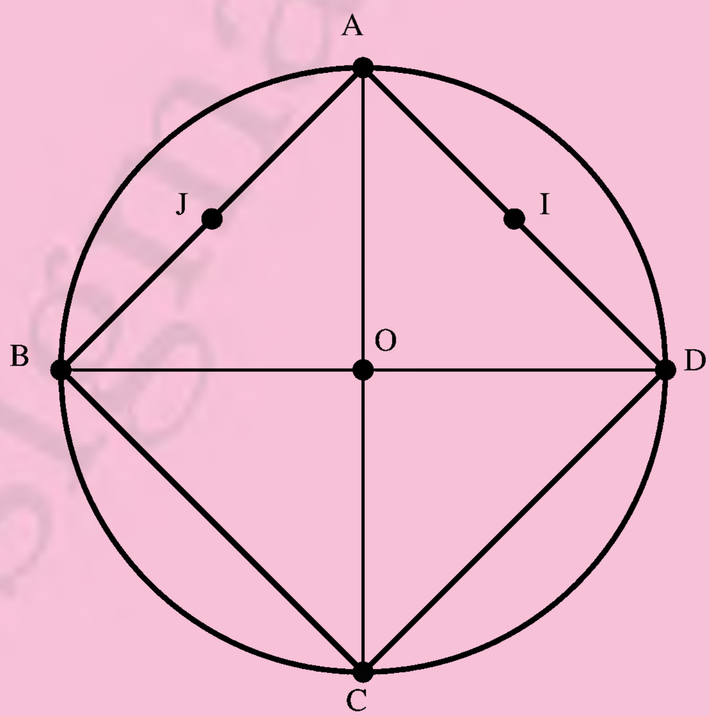
3) On considère la similitude indirecte g de centre E qui envoie B sur A.

   a) Déterminer le rapport de g.

   b) Soit O'=g(O). Justifier que le triangle O'EA est isocèle.

   c) Montrer O'A=AI.

4) Soit S=gof. Montrer que S est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.



13. Bac 2014 session principale

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans la figure ci-dessous, ABCD est un losange de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et AC = 3 BD.

1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.

   a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

   b) Montrer que O est le centre de f.

2) a) Soit D' l'image de D par f. Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que OA = 9 OD'.

   b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que BB'DD' est un losange.

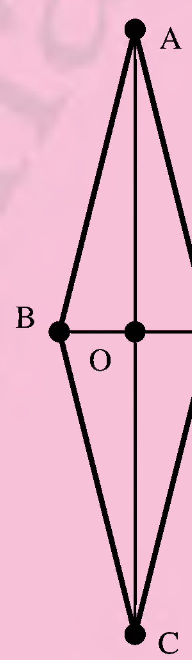
3) Soit g = $f\circ S_{(AC)}$.

   a) Déterminer la nature de g.

   b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.

   c) Déterminer l'axe Δ de g.

   d) La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q.
   Montrer que MQ = 3 NP.



14. Bac 2014 session de contrôle

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1), IAB est un triangle isocèle en A, O est le milieu de [AB], OA = 2 OI et $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

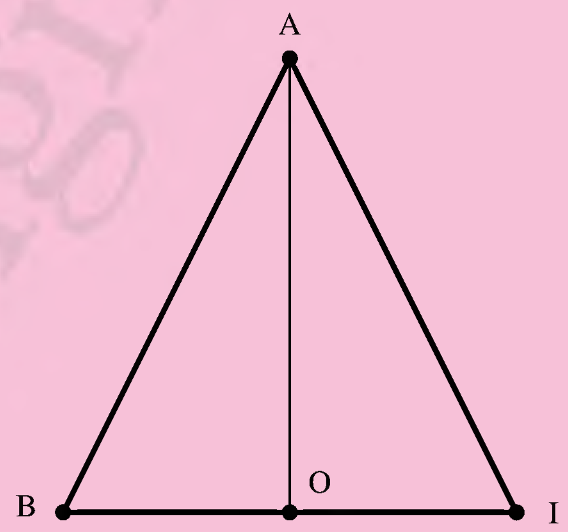
Soit h l'homothétie de centre I et de rapport 2 et s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Déterminer h(O) et s(I).

2) Pour tout point M du plan, on note P son image par h et Q son image par s.
Soit f l'application qui à tout point M du plan associe le point M' barycentre des points pondérés (P,3) et (Q,1).
   a) Soit O'=f(O). Montrer que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ et construire le point O'.
   b) Soit I'=f(I). Montrer que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ et construire le point I'.

3) Dans cette question, on munit le plan du repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, où J est le milieu de [OA] et on note z l'affixe d'un point M du plan.
   a) Exprimer en fonction de z l'affixe z_P du point P.
   b) Exprimer en fonction de z l'affixe z_Q du point Q.
   c) Soit z' l'affixe du point M'=f(M). Montrer que $z' = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}$.
   d) Déterminer l'image par f du cercle de diamètre [OI].

Annexe : Figure 1



15. Bac 2013 session principale

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1), OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

A) Soit f la similitude directe de centre O qui envoie B en A.

1) Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est égal à 2.

2) Soit C l'image de A par f.

a) Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que AC = 2 AB.

b) Placer le point C.

B) Soit g la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C. On note Ω le centre de g.

1) a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) Placer le point Ω.

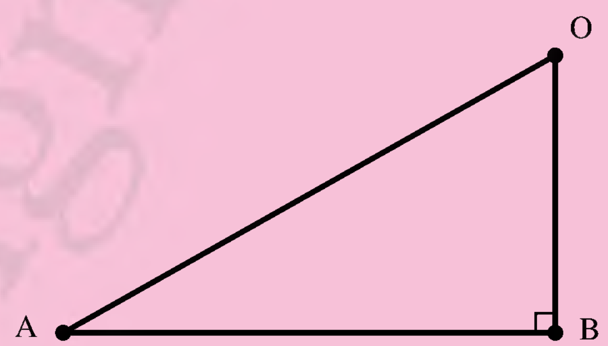
2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B,2) et H son image par g.

a) Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$; puis montrer que G est le milieu du segment [ΩH].

c) Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.

Annexe : Figure 1



16. Bac 2013 session de contrôle

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), ABCD est un rectangle tel que AB = 1 et AD = $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et FCDE et BFGH sont deux carrés.

1) On pose $q = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

   a) Montrer que $q^2 = 1 - q$.

   b) Montrer que $FG = q$ et que $EG = q^2$.

2) Soit S_1 la similitude directe de centre F, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport q.

   a) Montrer que $S_1(C) = G$.

   b) Déterminer l'image du carré FCDE par S_1.

3) Soit S_2 la similitude directe de centre G qui transforme H en E.
   Montrer que S_2 est de rapport q et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

4) On pose $h = S_2 o S_1$.

   a) Montrer que h(D)=E.

   b) Montrer que h est une homothétie de rapport q^2.

   c) Montrer que $\overrightarrow{AE} = q^2\overrightarrow{AD}$ et en déduire le centre de h.

   d) Montrer que les points A, G et C sont alignés.

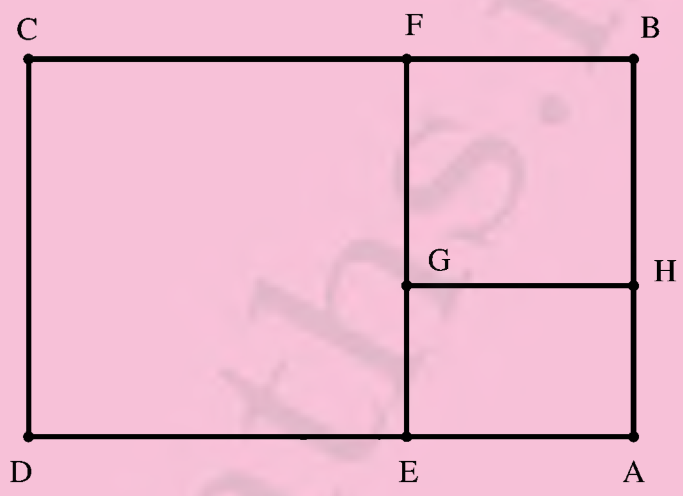
   e) Soit I=h(E) et J=h(F).
   Construire les points J et I et déterminer alors l'image du carré BFGH par S_2.

5) On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $a_n = q^{2n}$.

   a) Vérifier que a_0, a_1 et a_2 sont les aires respectives des carrés FCDE, BFGH et GEIJ.

   b) On pose pour tout entier naturel n, $\mathscr{A} = a_0 + a_1 + ... + a_n$.
   Exprimer $\mathscr{A}$ en fonction de n et vérifier que la limite de $\mathscr{A}$ est égale à l'aire du rectangle ABCD.

Annexe : Figure 2



17. Bac 2012 session principale

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A le point de coordonnées (3,2).

Soit N un point de l'axe $(O, \vec{u})$ et P le point de l'axe $(O, \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

1) a) Soit les points E(3,0) et F(0,2).
   Montrer qu'il existe une similitude directe S de centre A qui transforme E en F.
   Donner son rapport et son angle.

   b) Déterminer l'image de l'axe $(O, \vec{u})$ par S.

   c) En déduire que S(N) = P.

   d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que M'=S(M).
   Montrer que $z' = -\frac{3}{2}iz + \frac{13}{2}i$.

2) a) On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.
   Montrer que $3x + 2y = 13$.

   b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

18. Bac 2012 session de contrôle

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].
Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.
   b) En déduire S(C).
3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.
   b) En déduire que S(D) = K.
   c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(C,1)$ et $(K,4)$.
   d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que $S\circ S(A) = E$.
   e) Construire Ω.
4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

19. Bac 2011 session principale

Dans la figure ci-dessous, ABF est un triangle rectangle isocèle tel que $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. I est le milieu de [AF]. Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.

1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f.

2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

b) Déterminer la nature de gog et préciser son rapport et son angle.

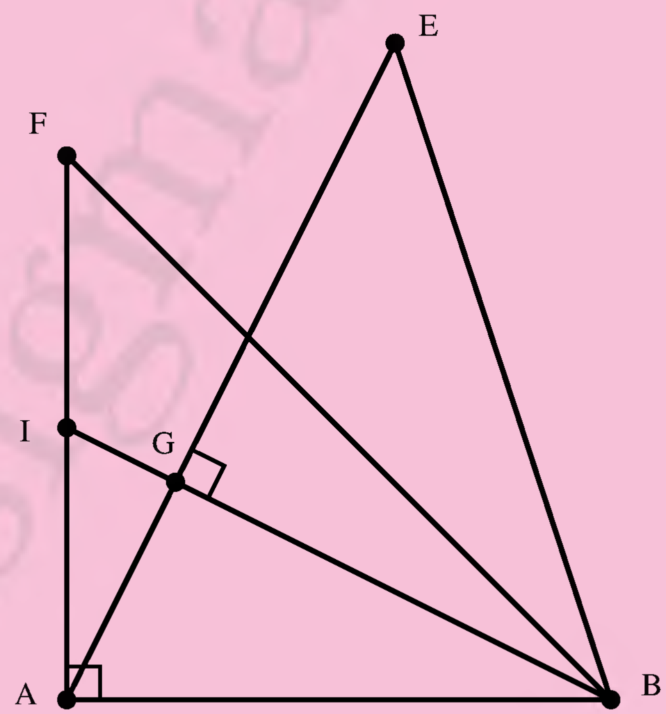
c) Montrer que $\tan\left(\widehat{ABI}\right) = \frac{1}{2}$. En déduire que GB = 2 GA.

d) En déduire que G est le centre de g.

3) Soit r=gof.

a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer r(E). En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].



20. Bac 2011 session de contrôle

Le plan est orienté.

Dans la figure 2 de l'annexe ci-jointe, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que $OA' = \frac{1}{2}OA$ et H' est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).

Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A'.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.

2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f.

   a) Déterminer la nature du triangle OA'B'.

   b) Construire le point B'.

   c) Montrer que f(H)=H'.

3) Soit I le milieu du segment [A'B] et J le milieu du segment [AA'].

   a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

   b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.

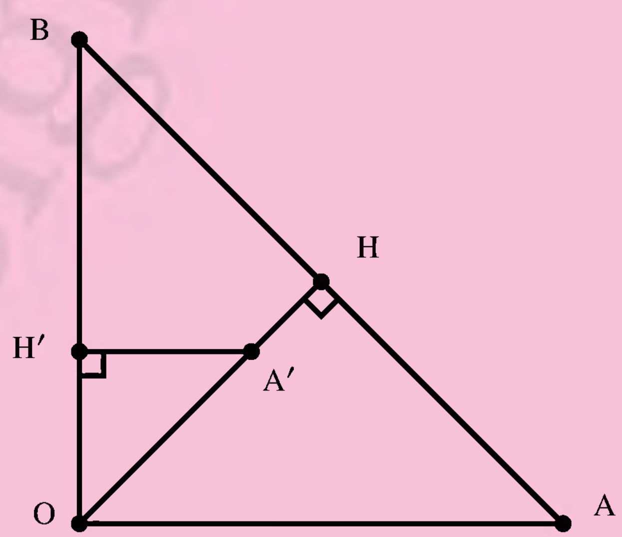
   c) Soit K le milieu du segment [AB'].
   Montrer que JK = OH' et que $\widehat{(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'})} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

   d) Déterminer R(K).

   e) En déduire que IK = HH' et que (IK) et (HH') sont perpendiculaires.

4) Montrer que le quadrilatère IHKH' est un carré.

Annexe : Figure 2

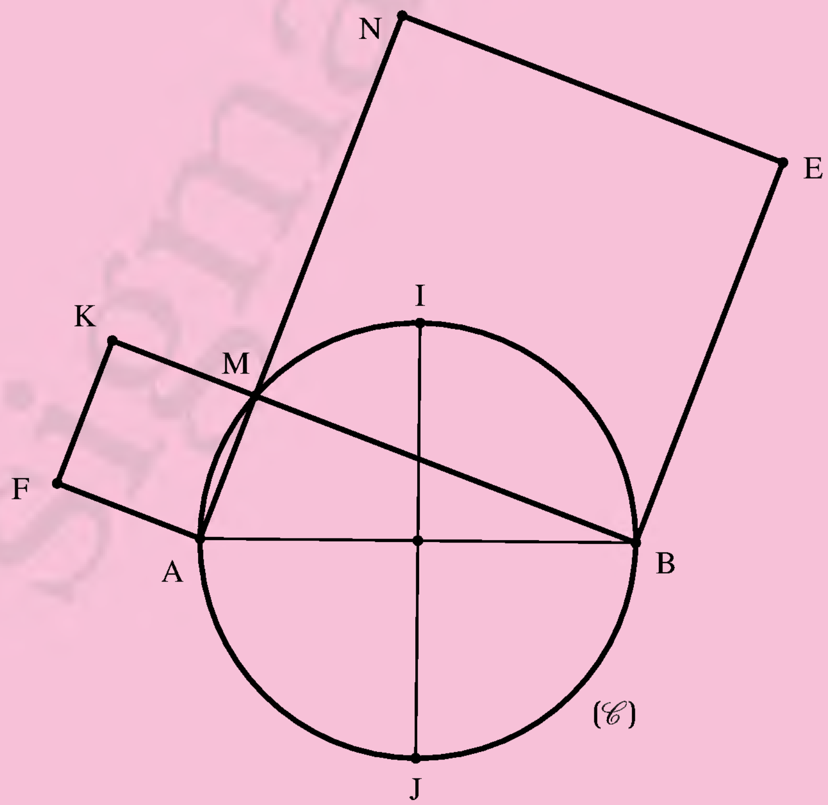


21. Bac 2010 session principale

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans la figure (1) de l'annexe ci-jointe, [AB] et [IJ] sont deux diamètres perpendiculaires du cercle $(\mathscr{C})$, M un point variable du cercle $(\mathscr{C})$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et MBEN et MKFA sont deux carrés de sens direct.

1) Montrer que les points E, F et M sont alignés.
2) On désigne par r_1 et r_2 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A et B.
   a) Montrer que $r_1 o r_2$ est la symétrie centrale de centre I.
   b) Déterminer $r_1 o r_2(E)$. En déduire que lorsque M varie, la droite (EF) passe par un point fixe que l'on déterminera.
3) Soit S la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
   a) Déterminer S(M).
   b) Construire le point G image de F par S.
   c) Montrer que F est le milieu du segment [KG].
   d) En déduire que lorsque M varie, la droite (KF) passe par un point fixe P.
   Construire P.

Annexe : Figure (1)



22. Bac 2009 session principale

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AC] et [JC].

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J qui envoie A sur K.

   a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

   b) Justifier que f(K) = L.

   c) Soit H le milieu du segment [AJ]. Justifier que f(I) = H.

3) On munit le plan du repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
   Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\frac{1+i}{2}\bar{z} + \frac{1+i}{2}$

   a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

   b) Donner les affixes des points I, K, J et H.

   c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$.

   d) Déduire alors que $\varphi = fos_{(}IK)$. (où f est la similitude définie dans 2ř et $s_{(}IK)$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ.

   a) Tracer Δ.

   b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.
   Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.

23. Bac 2009 session de contrôle

Dans l'annexe ci-jointe, ABCD est un rectangle de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D.
Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) a) Justifier que S(A) = B.

   b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que S(E) = O.

2) Soit I un point du segment [EO], distinct des points E et O et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A.
   Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P.

   a) Tracer (Γ) et placer les points M et P.

   b) Justifier que le point C appartient à (Γ).

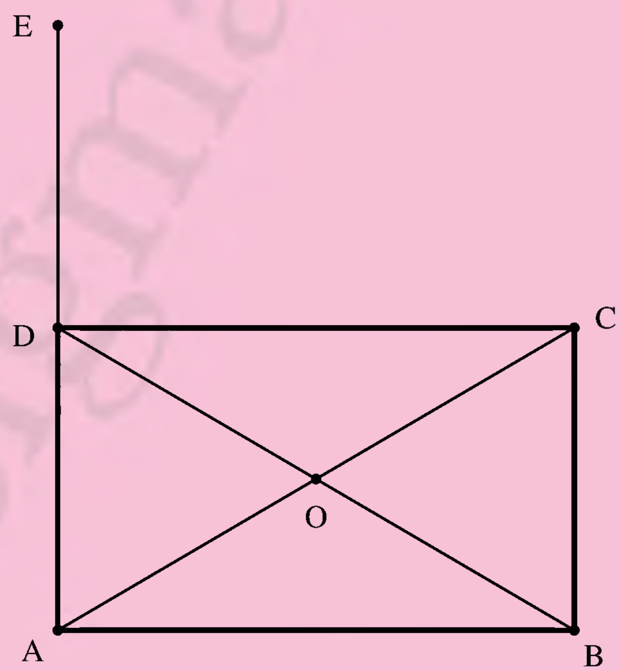
3) Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP).

   a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

   b) En déduire que S(M) = N.

4) Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Annexe



24. Bac 2008 session principale

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe, OAB est un triangle rectangle isocèle tel que OA = OB et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.

b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).
Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f.

3) Soit g la similitude indirecte de centre I qui envoie A sur D.

a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire g(O).

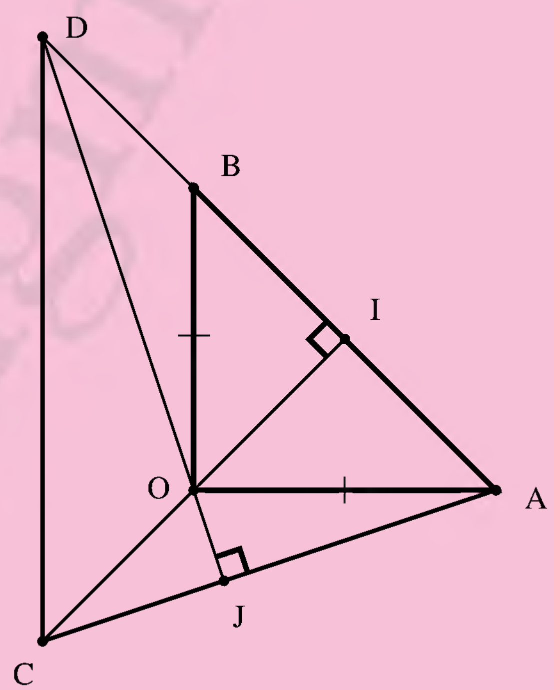
b) Déterminer les images de C et D par $g \circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g \circ f^{-1}$.

4) Soit I'=f(I) et J'=g(J).

a) Déterminer les images des points J et I' par $g \circ f^{-1}$.

b) Montrer que les droites (IJ), (I'J') et (CD) sont concourantes.

Annexe



25. Bac 2007 session principale

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

La bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ coupe [AC] en O.

On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de [OA].

1) a - Faire une figure.

   b - Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de [AB].

2) Soit f la similitude directe telle que : f(B)=O et f(H)=H'.

   a - Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de son angle.

   b - Montrer que H' est le milieu du segment [Of(A)].
   En déduire que A est le centre de f.

3) Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs [AB] et [AO] se recoupent en D.

   a - Montrer que les points B, O et D sont alignés.

   b - Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que f(C)=D.

   c - Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.

4) Soit $g = S_{(DH)} of$, où $S_{(DH)}$ est la symétrie axiale d'axe (DH).

   a - Déterminer g(A) et g(C).

   b - Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

   c - Soit Ω le centre de g.
   Montrer que $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$.
   Construire alors le centre Ω est l'axe Δ de g.

26. Bac 2007 session de contrôle

Soient A et I deux points du plan et soit R la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. On pose O=R(A) et B=R(O).

1) a - Construire les points O et B.

   b - Montrer que le quadrilatère IBOA est un losange.

2) Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon OI.
   Soit M un point de ce cercle et M' son image par la rotation R.

   a - Montrer que lorsque le point M décrit le cercle (Γ), son image M' décrit un cercle (Γ') qu'on précisera et qu'on construira.

   b - Soit Ω le deuxième point d'intersection des cercles (Γ) et (Γ').
   Montrer que si M est différent de I, les points M, Ω et M' sont alignés.

3) Soit f l'antidéplacement défini par f(A)=O et f(O)=B.

   a - Montrer que f est une symétrie glissante. Préciser son axe et son vecteur.

   b - Vérifier que $f = s_{(OB)} o R o s_{(OB)}$ où $s_{(OB)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe la droite (OB).

   c - Déterminer l'ensemble des points N du plan tels que R(N)=f(N).

4) Soit C et D les symétriques respectifs de I par rapport à O et B.
   On désigne par S la similitude directe définie par S(A)=C et S(O)=D et on pose $h = S o R^{-1}$.

   a - Déterminer h(O) et h(B).

   b - En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

   c - Déterminer alors les éléments caractéristiques de la similitude S.

5) Soit g la similitude indirecte telle que g(C)=O et g(D)=B.

   a - Déterminer le rapport de g. En déduire que g admet un seul point invariant qu'on notera J.

   b - On désigne par (d) l'axe de la similitude g et par E le point d'intersection des droites (d) et (OC).
   Soit E' l'image de E par g. (Il est conseillé de faire une figure d'étude à part pour cette question).
   Montrer que $\overrightarrow{JE'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JE}$.

c - Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{JE}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{JE}})\ [2\pi]$.
En déduire que les droites (d) et (CD) sont parallèles.

d - Soit C' le symétrique du point C par rapport à la droite (d). Montrer que E est le centre de gravité du triangle JCC' et en déduire que $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EO}$.

e - Construire alors le point E, l'axe (d) et le centre J de la similitude g.