Les examens du baccalauréat

Section Mathématiques

2006 - 2021

MATHÉMATIQUES

LES NOMBRES COMPLEXES

SIGMATHS

LES ANNALES DU BAC

Dhaouadi Nejib

1. Bac 2021 session de contrôle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z + \frac{1}{3} = 0$.

On note z_1 et z_2 les solutions avec $\text{Im}(z_1) > 0$.

b/ Ecrire z_1 sous forme exponentielle.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, A et B sont les points d'affixes respectives 1 et $e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Δ est la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

2) La droite Δ coupe la droite (OB) au point C.

Montrer que l'affixe du point C est égale à z_1.

3) Soit D le point d'affixe $\frac{1}{3\sqrt{3}}i$.

a/ Vérifier que $z_D = z_1^3$.

b/ Montrer que $\frac{z_D - 1}{z_1 - 1} = \frac{2}{3}$.

c/ Construire le point D.

4) Soit $z \in \mathbb{C}$.

Montrer que $(z^2 + z \in \mathbb{R})$ équivaut à $(z \in \mathbb{R}$ ou $\text{Re}(z) = -\frac{1}{2})$.

5) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, On désigne par M et N les points d'affixes respectives z et z^3.

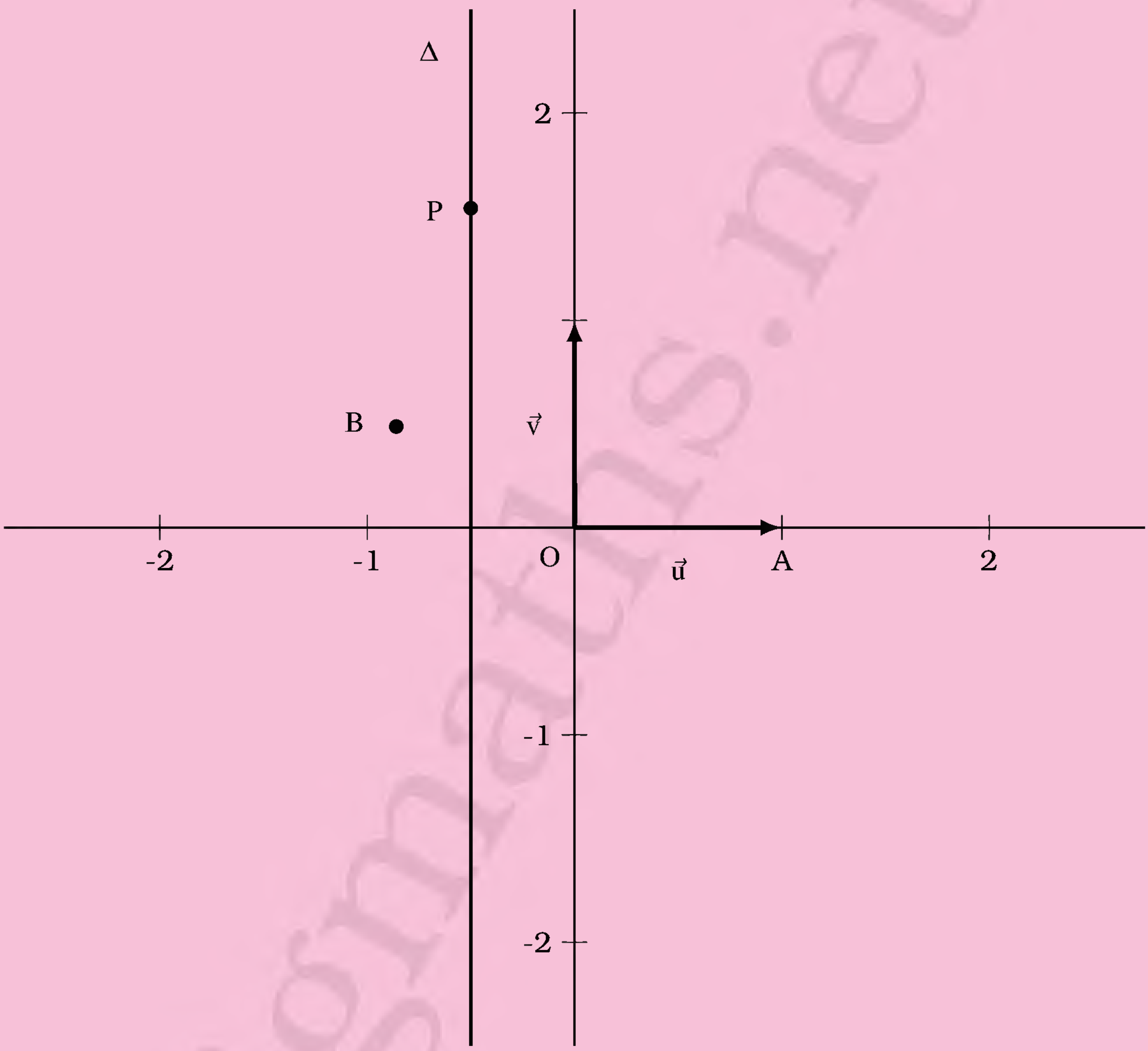
a/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

b/ Dans la figure 2 de l'annexe, on a placé un point P de la droite Δ d'affixe a.

Construire, en justifiant, le point Q d'affixe a^3.

sigmaths.net

Annexe : Figure 2



2. Bac 2020 session principale

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Dans la figure 1 de l'annexe, (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, A, B et C sont les points d'affixes respectives 1, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.
Soit Q un point du cercle (Γ) d'affixe un nombre complexe a, distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

1) On désigne par R le point d'affixe $a + \bar{a}$.

   a) Vérifier que $R \in (O, \vec{u})$. Construire R.

   b) Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O, R et Q sont alignés.

2) Soit P le point du plan d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.

   a) Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire P.

   b) Montrer que A, P et M sont alignés $\Longleftrightarrow (i\bar{a}+1)z - (ia-1)\bar{z} = i(a+\bar{a})$.

   c) Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP). On désigne par Z_H l'affixe du point H.

   Justifier que $Z_H = \dfrac{i(a+\bar{a})}{2(i\bar{a}+1)}$.

3) Soit N le point d'affixe $Z_N = \dfrac{a+\bar{a}}{i\bar{a}+1}$.

   a) Vérifier que N est l'image de H par une similitude que l'on déterminera.

   b) Construire le point N.

   c) Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle (Γ) privé des points B et C.

sigmaths.net

3. Bac 2018 session principale

Soit θ un réel non nul.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe,

— $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;

— $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 1 ;

— E est un point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OE}}) \equiv \theta\ [2\pi]$;

— F et G sont les points d'affixes respectives -1 et $1+\sqrt{2}$;

— Γ est le demi-cercle de diamètre [FG] ;

— D est le point d'intersection de Γ et de l'axe $(O, \vec{v})$.

1) a) Vérifier que $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'affixe $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}}\,e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A = ODe^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$. Construire alors le point A.

2) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$.

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe z_B, où z_B est la deuxième solution de (E). Déterminer z_B.

3) a) Montrer que les points O, A et B sont alignés.

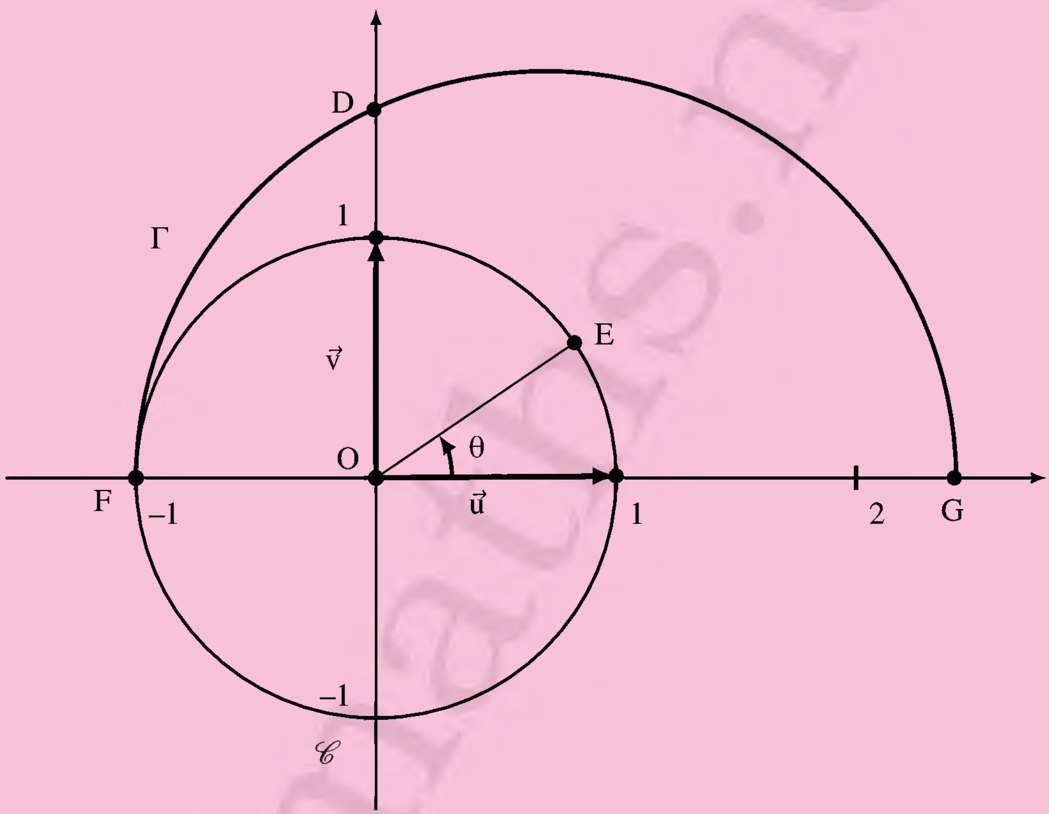
b) Placer le point C d'affixe $z_C = OD\,e^{i\theta}$.

c) Montrer que $\dfrac{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{AC}\right)}{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{AB}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

d) Construire alors le point B.

Annexe : figure 1



4. Bac 2018 session de contrôle

1) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2-(1+i)z-i=0$.
   Résoudre l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions de (E).

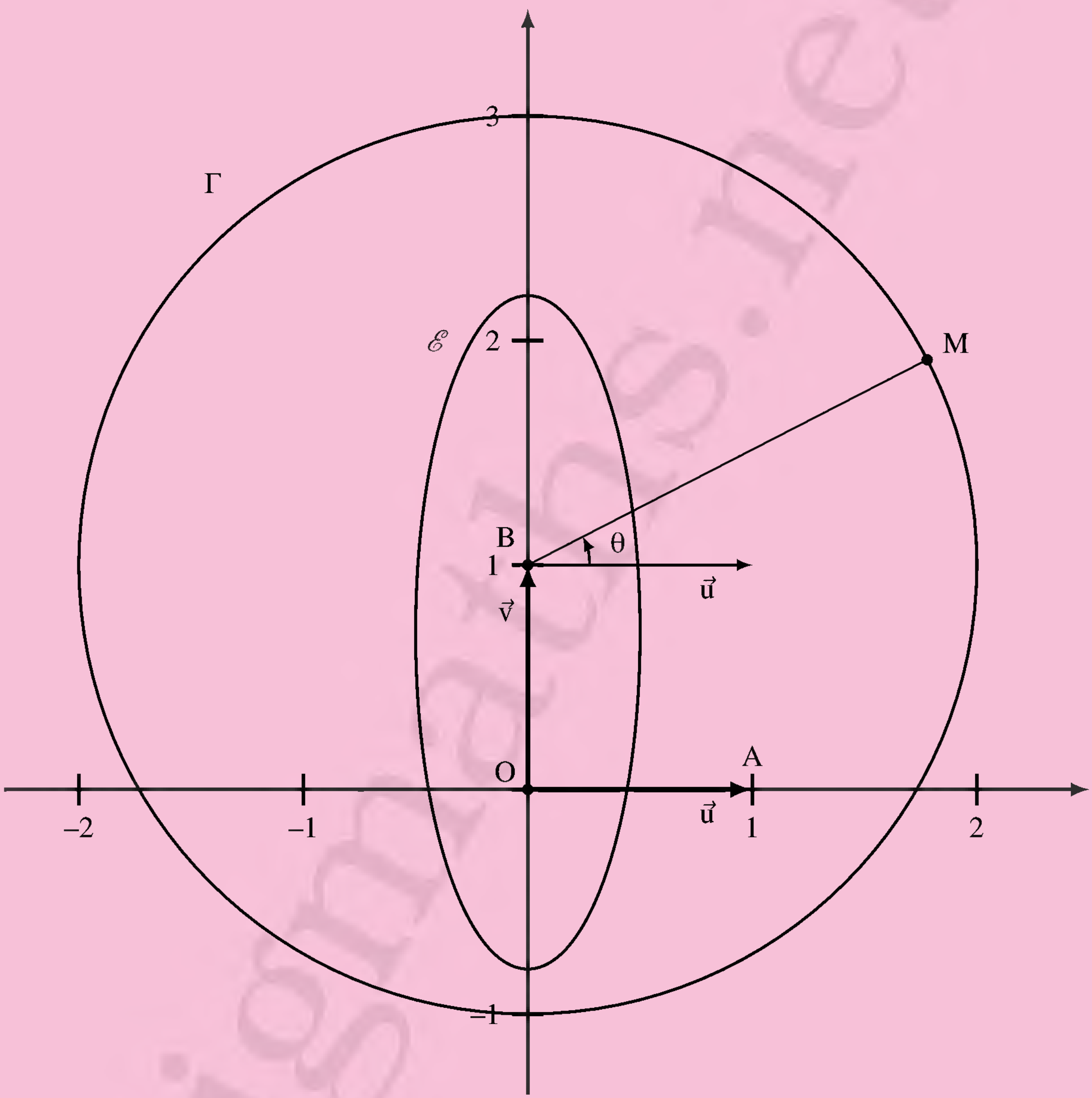
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives 1, i, z_1 et z_2.
   Soit z un nombre complexe distinct de 1, i, z_1 et z_2.
   On note M et M' les points d'affixes respectives z et $z'=\dfrac{z+i}{z-i}$.
   Justifier que les points M et M' sont distincts.
   Dans la suite de l'exercice on prend $z=i+2e^{i\theta}$, où θ est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2.
   b) Montrer que $z'=1+ie^{-i\theta}$.
   c) Montrer que AM'=1 et que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}})\equiv\dfrac{\pi}{2}-\theta\ [2\pi]$.
   d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle Γ.

4) Soit P le milieu du segment [MM'] et z_P son affixe.
   On désigne par Q le point d'affixe $z_Q=e^{i\frac{\pi}{4}}z_P$.
   a) Vérifier que $z_P=\dfrac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$.
   b) En déduire que $z_Q=\dfrac{i\sqrt{2}+2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$.
   c) Montrer alors que $z_Q=\dfrac{1}{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

5) a) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle Γ, le point Q varie sur l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation : $4x^2+\dfrac{4}{9}\left(y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$.
   b) Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ le cercle Γ, l'ellipse $\mathscr{E}$, et on a placé un point M sur le cercle Γ tel que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})\equiv\theta\ [2\pi]$. Construire les points M' et Q.

Annexe : figure 3



sigmaths.net

5. Bac 2017 session de contrôle

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1=0$.

1) a) Justifier que l'équation (E) possède deux solutions distinctes. (On ne demande pas de déterminer ces solutions)

b) Déterminer z_1+z_2. En déduire que les solutions de (E) ne sont pas conjuguées.
On désigne par z_1 la solution telle que $|z_1|>1$ et z_2 l'autre solution.

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, I et J d'affixes respectives z_1, z_2, 1 et -1.

2) a) Soit C le milieu du segment [AB]. Montrer que l'affixe du point C est $z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En utilisant $(z_2-z_1)^2=(z_2+z_1)^2-4z_1z_2$, montrer que $(z_2-z_1)^2=4\left(z_c^2-1\right)$.

c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CI}})+(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CJ}})\equiv 0\ [2\pi]$.
En déduire que la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle IAJ. On note K le centre de (C) et z_K l'affixe du point K.

a) Prouver que K est un point de l'axe $(O,\vec{v})$. On pose $z_K=iy$ où y est un réel non nul.

b) Soit M un point du plan d'affixe z. Justifier que $(M\in(C))$ équivaut à $\left(|z-iy|^2=|1-iy|^2\right)$.
En déduire que $(M\in(C))$ équivaut à $(z\bar{z}+iy(z-\bar{z})=1)$.

c) En remarquant que $z_1=\frac{1}{z_2}$, montrer que le point B appartient au cercle (C).

4) a) Construire le point C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Construire la droite (AB) et la médiatrice du segment [AB].

c) Déduire une construction des points A et B, images des solutions de l'équation (E).

6. Bac 2016 session principale

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(1+2i)mz-(1-i)m^2=0$, où m est un nombre complexe non nul, d'argument $\theta \in]0,\pi[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

b) Montrer que $\left(z_1z_2 \text{ est un réel strictement positif}\right)$ si et seulement si $\left(\theta=\frac{5\pi}{8}\right)$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\theta=\frac{5\pi}{8}$.

2) Vérifier que $z_1z_2=|m|^2\sqrt{2}$.

3) Soit t un réel strictement positif et $m=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}e^{i\frac{5\pi}{8}}$. On se propose de construire les points M_1 et M_2, images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;

B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t ;

E est le point d'intersection du demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC] avec l'axe $(O,\vec{v})$.

a) Montrer que $OE^2=OB.OC$.

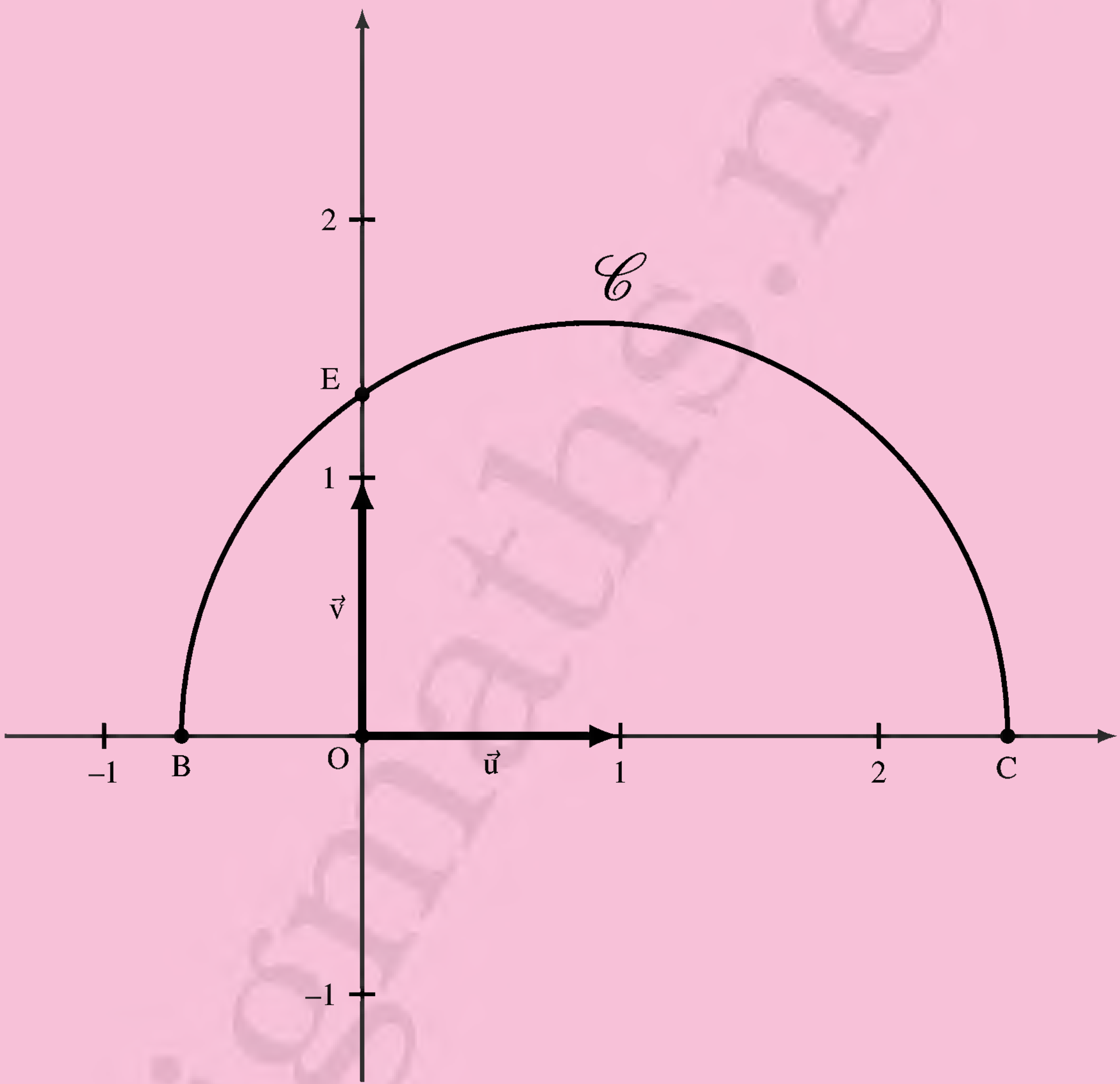
b) En déduire que $|m|=OE$.

4) a) Construire le point A d'affixe m.

b) En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E).

(On convient que $|z_1|<|z_2|$).

Annexe : figure 2



sigmaths.net

7. Bac 2015 session principale

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

   b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.
   Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.
   On désigne par N le point de (Γ) tel que $\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
   Justifier que N a pour affixe $2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F)=K.

   c) En déduire la nature du triangle AFK.

5) a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

   b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

8. Bac 2013 session principale

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.
On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.
Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i\left(1 + e^{i\theta}\right)$.

1) a) Calculer $\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)$ et $\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)$.

   b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2.

   c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_P telle que $z_P = (1 - i)\sin\theta . e^{i\theta}$.

   a) Montrer que $\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta . \cos\theta$ et calculer $\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})}$.

   b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

sigmaths.net

9. Bac 2012 session de contrôle

Soit a un réel strictement positif.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(1+i)az+ia^2=0$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
   On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.

   a) Quelle est la nature du triangle OAB ?

   b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré.

3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.

   a) Montrer que l'affixe de P est égale à $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$.

   b) Calculer l'affixe du point Q.

   c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

sigmaths.net

10. Bac 2011 session principale

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et 1.

1) a) Montrer que :

(Le triangle MNP est rectangle en P) **si et seulement si** $\left(\frac{1+z}{z} \text{est imaginaire pur}\right)$.

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA], privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O, \vec{u})$.

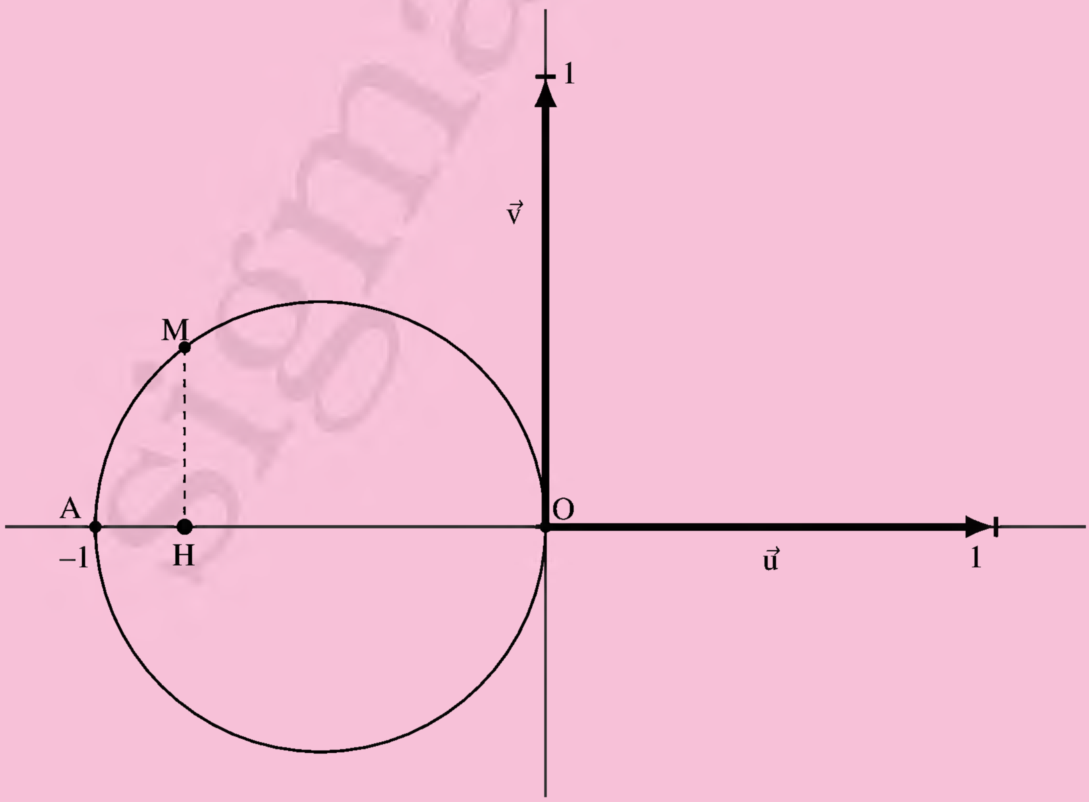
On se propose de construire les points N et P d'affixe respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})}\ [2\pi]$ puis que $\widehat{(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP})} \equiv \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})}\ [2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.

Annexe : figure 2



11. Bac 2010 session principale

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe -2.

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α, $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.
   Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.
   a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α, $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.
   Placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, M, N et P.
   b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.
   Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\overline{\alpha}$ est une solution de (E).
   b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

sigmaths.net

12. Bac 2008 session de contrôle

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation
(E) : $z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0$.

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

   b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z$.

   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

   b) Soit M un point du plan distinct de O et soit M' son image par f.
   Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle et en déduire un procédé de construction du point M'.

3) On considère les points A_n définis par :
   A_0 le point d'affixe (-1+i) et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

   a) Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.

   b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

13. Bac 2007 session principale

1) Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.
   Résoudre l'équation : $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$, $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]0,\pi[$.

   a – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

   b – Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$ les points M et N varient sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera.

3) a – Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ du triangle AMN.

   b – Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle $\mathscr{C}$.

---

14. Bac 2006 session principale

θ étant un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$; on pose pour tout nombre complexe z

$$f_\theta(z) = z^2 - (i+e^{i\theta})z + (1+i)(-1+e^{i\theta})$$

1) a – Vérifier que $f_\theta(1+i) = 0$.

   b – En déduire les solutions z' et z" dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B et M d'affixes respectives -1, $i\sqrt{3}$ et $-1+e^{i\theta}$.

   [a – Montrer que lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$, M varie sur un cercle $(\mathscr{C})$ de centre A dont on précisera le rayon.

   [b – Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$.

sigmaths.net