Épreuve : Mathématiques

Durée : 4H

Devoir de Synthèse N°2

4ème Maths

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice n°1 — 6,5 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = ln(e^x + e^{-x})$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

1) a) *Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = x + ln(1 + e^{-2x})$.*

b) *En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite $\Delta : y = x$.*

c) *Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.*

2) a) *Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.*

b) *Drésser le tableau de variations de f.*

c) *Tracer la courbe $\mathscr{C}$.*

Partie B

Pour tout réel positif x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x ln(1 + e^{-2t})dt$.

1) *Donner une interprétation graphique de $F(a)$ pour $a > 0$.*

2) *Etudier le sens de variation de F sur $[0, +\infty[$.*

3) *Soit a un réel strictement positif.*

a) *Vérifier que pour tout réel $t \in [1; 1+a]$, on a : $\dfrac{1}{1+a} \leq \dfrac{1}{t} \leq 1$.*

b) *En déduire que pour tout $a > 0$, $\dfrac{a}{1+a} \leq ln(1+a) \leq a$.*

4) *Déduire de 3) que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}dt$*

et puis que $\dfrac{1}{2}ln2 - \dfrac{1}{2}ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2x}$

5) *Montrer que F admet une limite finie L en $+\infty$ et que $\dfrac{1}{2}ln2 \leq L \leq \dfrac{1}{2}$.*

6) *Pour tout entier n, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} ln(1+e^{-2t})dt$ et $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.*

a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq ln(1+e^{-2n})$ et déduire la limite de u_n.*

b) *Exprimer S_n à l'aide de F et n.*

c) *Déterminer alors la limite de S_n quant n tend vers $+\infty$.*

2 Exercice n°2 4 points

Soit f la fonction définie sur $[0,2[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

1) *Pour* $x\in[0,2[$, *on pose* $F_0(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   Calculer $F_0(x)$ *et vérifier que* $\lim\limits_{x\to 2^-} F_0(x)=2$

2) *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on définit l'application* F_n *sur* $[0,2[$ *par :* $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}}dt$

   a) *À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :*

   $$F_{n+1}(x)=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt.$$

   b) *En écrivant* $\displaystyle\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_0^x t^{2n+1}\frac{4-t^2}{\sqrt{4-t^2}}dt$, *montrer que :*

   $$(2n+3)F_{n+1}(x)=8(n+1)F_n(x)-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}.$$

3) *On admet que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $F_n(x)$ *admet une limite finie* u_n *quand* x *tend vers 2 par valeurs inférieures* (*Attention* x *tend vers* 2^- *et* n *fixé*)

   Montrer par récurrence que $u_n=2\dfrac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3 Exercice n°3 4 points

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur la chaine de production. Il peut arriver toute fois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée:

- *La probabilité que l'alarme se déclenche sans qu'il y ait eu incident est* $0,02$;
- *La probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est* $0,002$;
- *La probabilité qu'un incident se produit est* $0,01$.

Considérons les événements A: «*L'alarme se déclenche*» *et* I: «*Un incident se produit*».

Ainsi, par exemple $A\cap\overline{I}$ *représente l'événement* «*L'alarme se déclenche sans qu'il y ait eu incident*».

1) a) *Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.*

   b) *En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.*

2) *Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur du système d'alarme.*

3) *L'alarme vient de ce déclencher, Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?*

4) *Les assureurs estiment qu'en moyenne, le coût des anomalies est le suivant:*

- 20000 \$ *pour un incident lorsque l'alarme fonctionne.*
- 30000 \$ *pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas.*
- 250 \$ *lorsque l'alarme se déclenche par erreur.*

On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour.

X est la variable aléatoire représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.

a) *Donner la loi de probabilité de X.*

b) *Quel est le coût moyen journalier des anomalies?*

4 Exercice n°4 5,5 points

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

1) *On considère la rotation R_1 de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, la rotation R_2 de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et l'isométrie $f = R_1 o R_2$.*

a) *Déterminer $f(A)$ et puis caractériser f.*

b) *Soit E un point du segment $[AB]$ privé de A et B. La droite passant par E et parallèle à (BD) coupe (BC) en un point F. Montrer que $R_1(E) = F$.*

c) *Soit G le point tel que $R_2(G) = E$.*

Montrer que A est le milieu de $[GF]$.

2) *On note S_A la symétrie centrale de centre A et $S_{(BD)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BD). Soit l'application $g = S_A o S_{(BD)}$*

a) *On pose $h = goS_{(AC)}$ où $S_{(AC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (AC).*

Montrer que h est la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

b) *Montrer que $g = S_{(BD)} o S_C$ où S_C est la symétrie centrale de centre C.*

c) *On pose $H = S_{(BD)}(G)$ et $L = S_C(H)$. Montrer que (BD) est la médiatrice de $[LF]$*

SIGMATHS
2020 - 2021

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice n°1

Partie A

1) a) *Soit* $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = ln(e^x(1+e^{-2x})) = ln(e^x) + ln(1+e^{-2x}) = x + ln(1+e^{-2x})$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln(1+e^{-2x}) = ln(1) = 0$

Donc la droite Δ *d'équation* $y = x$ *est une asymptote à la courbe* $\mathscr{C}$ *au* $\mathcal{V}(+\infty)$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) - x = ln(1+e^{-2x}) > 0$ *car* $1 + e^{-2x} > 1$ *donc la courbe* $\mathscr{C}$ *est au dessus de l'asymptote* Δ.

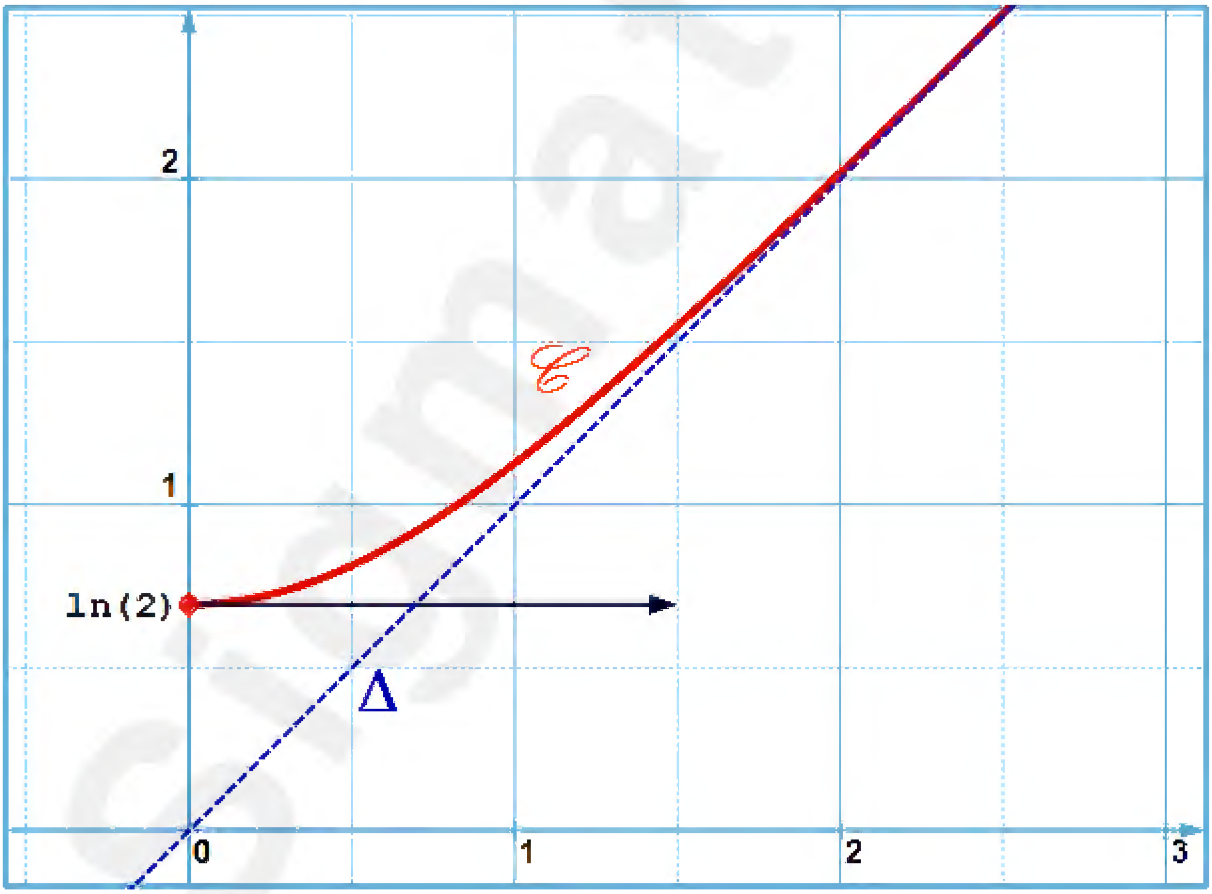
2) a) *On pose* $u(x) = e^x + e^{-x}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u(x) > 0$ *en plus* u *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *donc* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *et on a:*

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^x+1)}$$
$$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 +	
$f(x)$	$ln(2)$ ↗	$+\infty$

c)



Partie B

1) *Pour* $a>0$, $F(a)=\int_0^a ln(1+e^{-2t})dt=\int_0^a (f(t)-t)dt$ *représente la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan délimitée par la courbe* $\mathscr{C}$, *la droite* Δ *et les droites d'équations d'équations* $x=0$ *et* $x=a$.

2) *La fonction :* $t\mapsto ln(1+e^{-2t})$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$, *donc* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $F'(x)=ln(1+e^{-2x})>0$ *donc* F *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$.

3) a) $1\leqslant t\leqslant 1+a \Longleftrightarrow \dfrac{1}{1+a}\leqslant\dfrac{1}{t}\leqslant 1$

b) $\forall t\in[1,1+a]$, $\dfrac{1}{1+a}\leqslant\dfrac{1}{t}\leqslant 1 \Longrightarrow \int_1^{1+a}\dfrac{1}{1+a}dt\leqslant\int_1^{1+a}\dfrac{1}{t}dt\leqslant\int_1^{1+a}1dt$

donc $\dfrac{1}{1+a}(1+a-1)\leqslant[lnt]_1^{1+a}\leqslant 1+a-1 \Longrightarrow \dfrac{a}{1+a}\leqslant ln(1+a)\leqslant a$.

4) *Soit* $x>0$, $\forall t\in[0,x]$ *posons* $a=e^{-2t}>0$ *donc d'après* 3) b)

$\dfrac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\leqslant ln(1+e^{-2t})\leqslant e^{-2t}$. *donc par passage à l'intégrale sur* $[0,x]$

$$\int_0^x\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt\leqslant\int_0^x ln(1+e^{-2t})dt\leqslant\int_0^x e^{-2t}dt \Longrightarrow \int_0^x\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt\leqslant F(x)\leqslant\int_0^x e^{-2t}dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}\int_0^x\frac{-2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt\leqslant F(x)\leqslant\frac{-1}{2}\int_0^x -2e^{-2t}dt \Leftrightarrow \frac{-1}{2}[ln(1+e^{-2t})]_0^x\leqslant F(x)\leqslant\frac{-1}{2}[e^{-2t}]_0^x$$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{2}(ln(1+e^{-2x})-ln2)\leqslant F(x)\leqslant\dfrac{-1}{2}(e^{-2x}-1)$ *ce qui donne finalement:*

$\dfrac{ln2}{2}-\dfrac{1}{2}ln(1+e^{-2x})\leqslant F(x)\leqslant\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$ *pour tout* $x>0$.

5) *Pour tout* $x>0$, $F(x)\leqslant\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}<\dfrac{1}{2}\Longrightarrow F$ *est magorée sur* $]0,+\infty[$.

F *est croissante et majorée sur* $]0,+\infty[$ *donc* F *admet une limite finie* L *en* $+\infty$.

Pour tout $x>0$, $\dfrac{ln2}{2}-\dfrac{1}{2}ln(1+e^{-2x})\leqslant F(x)\leqslant\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$ *et par passage à limite en* $+\infty$ *on obtient* $\dfrac{ln2}{2}\leqslant L\leqslant\dfrac{1}{2}$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$.

6) a) $t\in[n,n+1] \Rightarrow t\geqslant n \Rightarrow -2t\leqslant -2n \Rightarrow e^{-2t}\leqslant e^{-2n} \Rightarrow 1+e^{-2t}\leqslant 1+e^{-2n}$

Donc $ln(1+e^{-2t})\leqslant ln(1+e^{-2n})$ *car la fonction ln est croissante*

$\forall t\in[n,n+1]$, $0<ln(1+e^{-2t})\leqslant ln(1+e^{-2n})$

$$\Longrightarrow 0<\int_n^{n+1}ln(1+e^{-2t})dt\leqslant\int_n^{n+1}ln(1+e^{-2n})dt=(n+1-n)ln(1+e^{-2n})$$

Donc $0<\int_n^{n+1}ln(1+e^{-2t})dt\leqslant ln(1+e^{-2n})$ *d'où* $\underline{0<u_n\leqslant ln(1+e^{-2n})}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-2n}=0\Longrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}ln(1+e^{-2n})=ln1=0$

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq ln(1+e^{-2n}) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} ln(1+e^{-2n}) = ln(1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \textit{La suite } (u_n) \textit{ est convergente} \\ \textit{et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{array} \right.$$

b) *On a*: $S_n = \int_0^1 ln(1+e^{-2t})dt + \int_1^2 ln(1+e^{-2t})dt + ... + \int_n^{n+1} ln(1+e^{-2t})dt$

$$= \int_0^{n+1} ln(1+e^{-2t})dt = F(n+1).$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1) = L$ *(théorème du cours)*

Exercice n°2

1) $F_0(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{t}}{\sqrt{4-\mathrm{t}^2}}\mathrm{dt} = \frac{-1}{2}\int_0^x \frac{-2\mathrm{t}}{\sqrt{4-\mathrm{t}^2}}\mathrm{dt} = \frac{-1}{2}\left[2\sqrt{4-\mathrm{t}^2}\right]_0^x = 2-\sqrt{4-\mathrm{x}^2}$

Donc $\lim\limits_{x\to2^-} F_0(x) = 2.$

2) a) $F_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{t^{2n+3}}{\sqrt{4-t^2}}dt.$ *On pose* $\begin{cases} u(x) = t^{2n+2} \Longrightarrow u'(x) = (2n+2)t^{2n+1} \\ v'(x) = \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} \Longleftarrow v(x) = -\sqrt{4-t^2} \end{cases}$

Donc $F_{n+1}(x) = \left[-t^{2n+2}\sqrt{4-t^2}\right]_0^x + (2n+2)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt.$

$$= -x^{2n+2}\sqrt{4-x^2} + 2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt. \qquad (*)$$

b) $\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt = \int_0^x t^{2n+1}\frac{4-t^2}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int_0^x t^{2n+1}\frac{4}{\sqrt{4-t^2}}dt - \int_0^x t^{2n+1}\frac{t^2}{\sqrt{4-t^2}}dt$

$$= 4\int_0^x \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}}dt - \int_0^x \frac{t^{2n+3}}{\sqrt{4-t^2}}dt = 4F_n(x) - F_{n+1}(x).$$

Reprenons l'égalité $(*)$ *on obtient*: $F_{n+1}(x) = -x^{2n+2}\sqrt{4-x^2} + 2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt$

$F_{n+1}(x) = -x^{2n+2}\sqrt{4-x^2} + 2(n+1)\left(4F_n(x) - F_{n+1}(x)\right)$

$\qquad = -x^{2n+2}\sqrt{4-x^2} + 8(n+1)F_n(x) - (2n+2)F_{n+1}(x)$

$\Longleftrightarrow \boxed{(2n+3)F_{n+1}(x) = 8(n+1)F_n(x) - x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}}$

3) *Initialisation*: *Pour* $n=0$, $\lim\limits_{x\to2^-} F_0(x) = 2 = 2\frac{16^0(0!)^2}{(2\times0+1)}$ *ce qui est vrai*

Hérédité: *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *supposons que* $u_n = 2\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ *et montrons que*

$$u_{n+1} = 2\frac{16^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \quad \textit{avec } u_n = \lim_{x\to2^-} F_n \quad \textit{et} \quad u_{n+1} = \lim_{x\to2^-} F_{n+1}$$

D'après $(**)$ *on* $\forall x \in [0,2[$, $(2n+3)F_{n+1}(x) = 8(n+1)F_n(x) - x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}$

Par passage à la limite quand x *tens vers* 2^- *(et* n *fixé), on obtient*:

$(2n+3)u_{n+1} = 8(n+1)u_n$ *ou encore* $u_{n+1} = \frac{8(n+1)}{(2n+3)}u_n = \frac{16(n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)}u_n$

$$\Longrightarrow u_{n+1}=\frac{16(n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)}\times 2\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}=2\frac{16^{n+1}(n!(n+1))^2}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}=2\frac{16^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$$

Exercice n°3

Les données: $p(I)=0,01$, $p(I\cap\overline{A})=0,002$, $p(\overline{I}\cap A)=0,02$

1) a) *D'après la formule des probabilité totales* $p(I)=p(I\cap A)+p(I\cap\overline{A})$

Donc $p(I\cap A)=p(I)-p(I\cap\overline{A})=0,01-0,002=0,008$ *d'où* $\boxed{p(I\cap A)=0,008}$

b) *D'après la formule des probabilité totales* $p(A)=p(I\cap A)+p(\overline{I}\cap A)$

Donc $p(A)=0,008+0,02=0,028$ *d'où* $\boxed{p(A)=0,028}$

2) *Une erreur du système aura lieu dans le cas du déclenchement de l'alarme sans incident ou présence d'un incident sans déclenchement de l'alarme.*

Si cet événement est noté E on a: $p(E)=p(A\cap\overline{I})+p(\overline{A}\cap I)=0,002+0,02$

Donc $\boxed{p(E)=0,022}$

3) $p(I/A)=\dfrac{p(A\cap I)}{p(A)}=\dfrac{0.008}{0.028}\simeq 0,2857$

4) a) *Les valeurs prises par X sont* $0,\ 250,\ 20000$ *et* 30000

- $p(X=0)=p(\overline{A}\cap\overline{I})$ (*pas d'incident et l'alarme ne se déclenche pas*)

on sait que $p(\overline{A})=p(I\cap\overline{A})+p(\overline{I}\cap\overline{A})$ (*Formule des probabilités totales*)

Donc $p(\overline{A}\cap\overline{I})=\ p(\overline{A})-p(I\cap\overline{A})=(1-0,028)-0.002=0,97$

- $p(X=250)=p(A\cap\overline{I})=0,02$
- $p(X=20000)=p(A\cap I)=0,008$
- $p(X=30000)=p(\overline{A}\cap I)=0,002$

b) *Calculons* $E(X)$ *qui représente le coût moyen journalier des anomalies*

$$E(X)=\sum_{i=0}^{3}x_i\,p(X=x_i)$$
$$=0\times 0,97+250\times 0,02+20000\times 0,008+30000\times 0,002=225$$

Donc coût moyen journalier des anomalies est : 225 \$

Exercice n°4

1) a) *ABCD est un carré direct donc* $DA=DC$ *et* $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *d'où* $R_2(A)=C$

de meme on a: $BC=BA$ *et* $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *d'où* $R_1(C)=A$

Alors $f(A)=(R_1oR_2)(A)=R_1(R_2(A))=R_1(C)=A$

f est la composée de deux rotations dont la somme des angles est non nul et égale à π donc f est une rotation d'angle π ou encore une symétrie centrale et puisque A est invariant par f alors A est son centre.

b) *Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires et de meme sens et de meme pour les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{FB}$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et puisque $\widehat{FBE}$ est un angle droit alors $\left(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et par suite le triangle FBE est isocèle et rectangle en B*

Ainsi on a: $BF = BE$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc $R_1(E) = F$.

c) $S_A(G) = (R_1 o R_2)(G) = R_1(R_2(G)) = R_1(E) = F \Rightarrow A$ *est le milieu de* $[FG]$

2) a) $h = goS_{(AC)} = S_A oS_{(BD)} oS_{(AC)}$

(AC) et (BD) sont deux droites perpendiculaires en $O \Rightarrow S_{(BD)} oS_{(AC)} = S_O$

Donc $h = S_A oS_O$: composée de deux rotations dont la somme des angles est égale à 2π donc c'est une translation. En plus $h(C) = S_A(S_O(C)) = S_A(A) = A$

Donc h est la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$

b) *D'après a) $h = goS_{(AC)} = t_{\overrightarrow{CA}}$ donc $g = t_{\overrightarrow{CA}} oS_{(AC)}$: symétrie glissante d'axe (AC) et de vecteur $\overrightarrow{CA}$. Soit Δ la parallèle à (BD) passant par C*

$t_{\overrightarrow{CA}} = t_{2\overrightarrow{CO}}$ où $C \in \Delta$ et O le projeté orthogonale de C sur (BD) avec $\Delta // (BD)$

Donc $t_{\overrightarrow{CA}} = S_{(BD)} oS_{\Delta}$ et $g = S_{(BD)} oS_{\Delta} oS_{(AC)}$

Δ et (AC) sont perpendiculaires en $C \Rightarrow S_{\Delta} oS_{(AC)} = S_C$ d'où $\boxed{g = S_{(BD)} oS_C}$.

c) $L = S_C(H) = S_C(S_{(BD)}(G)) = S_C(S_{(BD)}(S_A(F))) = S_C oS_{(BD)} oS_A(F)$

$S_C oS_{(BD)} oS_A = S_{\Delta} oS_{(AC)} oS_{(BD)} oS_A = S_{\Delta} oS_O oS_A$ *car* $S_{(AC)} oS_{(BD)} = S_O$

En plus $S_O oS_A = (S_A oS_O)^{-1} = \left(t_{\overrightarrow{CA}}\right)^{-1} = t_{\overrightarrow{AC}}$.

Or $t_{\overrightarrow{CA}} = S_{(BD)} oS_{\Delta} \Rightarrow t_{\overrightarrow{AC}} = S_{\Delta} oS_{(BD)}$ donc $S_C oS_{(BD)} oS_A = S_{\Delta} oS_{\Delta} oS_{(BD)} = S_{(BD)}$.

Finalement $L = S_{(BD)}(F)$ et par suite (BD) est la mediatrice de $[LF]$