

Probabilité conditionnelle

Created by Dhaouadi Nejib



I. Définition

Activité

Une urne contient sept boules noires numérotées 0,0,0,0,1,1,1 et cinq boules blanches numérotées 0,0,1,1,1. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire une boule au hasard et on considère les événements suivants:

N : "La boule tirée est noire"

A : "La boule tirée porte le numéro 0"

Calculer les probabilités $p(N)$, $p(A)$ et $p(N \cap A)$

2) On a tiré une boule de l'urne, on a remarqué qu'elle est noire.

Calculer la probabilité q que la boule tirée porte le numéro 0.

Comparer q et $\frac{p(N \cap A)}{p(N)}$.

Solutions

Le contenu de l'urne peut être résumé dans le tableau suivant:

	Boules noires	Boules blanches
Boules n° 0	4	2
Boules n° 1	3	3

1) L'univers E des cas possibles est formé par les 12 boules donc

$$p(N) = \frac{\text{Card}(N)}{\text{Card}(E)} = \frac{7}{12}; p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$N \cap A$: "La boule tirée est noire n° 0"

$$\text{Donc } p(N \cap A) = \frac{\text{card}(N \cap A)}{\text{Card}(E)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

2) Dans ce cas un cas possible est forcément une boule noire (car on sait déjà quelle est noire) donc l'univers des cas possibles se réduit à l'ensemble des sept boules noires seulement.

$$\text{Donc } q = \frac{4}{7} \text{ et } \frac{p(N \cap A)}{p(N)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{7} = \frac{4}{7} = q$$

Commentaire: q est appelé probabilité conditionnelle de A sachant N .

Théorème et définition

Soit $(E, \mathcal{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini.

Soit B un événement tel que $p(B) \neq 0$

L'application p_B définie de $\mathcal{P}(E)$ sur $[0, 1]$ par : $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ est une probabilité.

La probabilité p_B est appelée probabilité B-conditionnelle

Le réel $p_B(A)$ noté aussi $p(A/B)$ est appelé probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé ou tout simplement probabilité de A sachant B.

Démonstration

 Montrons que p_B est une probabilité

$$\diamond p_B(E) = \frac{p(E \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$$

$$\diamond p_B(\emptyset) = \frac{p(\emptyset \cap B)}{p(B)} = \frac{p(\emptyset)}{p(B)} = 0$$

$$\diamond \text{ Soit } A \text{ un événement On pose } A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^n \{a_i\}$$

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p\left(\left(\bigcup_{i=1}^n \{a_i\}\right) \cap B\right)}{p(B)} = \frac{p\left(\bigcup_{i=1}^n (\{a_i\} \cap B)\right)}{p(B)}$$

Or les événements $\{a_1\} \cap B, \{a_2\} \cap B, \dots, \{a_n\} \cap B$ sont deux à deux incompatibles car $\{a_i\} \cap B = \{a_i\}$ ou $\{a_i\} \cap B = \emptyset$

$$\text{Donc } p_B(A) = \frac{\sum_{i=1}^n p(\{a_i\} \cap B)}{p(B)} = \sum_{i=1}^n \frac{p(\{a_i\} \cap B)}{p(B)} = \sum_{i=1}^n p_B(\{a_i\})$$

Exemple 1

Dans un lycée, on demande aux élèves et aux professeurs s'ils préfèrent avoir cours le matin ou l'après-midi.

On obtient les résultats donnés dans le tableau ci-dessous :

	Matin	Après-midi	Total
Élèves	657	438	1095
Profs	84	21	105
Total	741	459	1200

On choisit une personne au hasard (parmi élèves et professeurs) et on considère les événements :

E : « La personne tirée au sort est un élève »

M : « La personne tirée au sort préfère avoir cours le matin ».

1) Calculer $p(E)$ et $p(E \cap M)$

2) En déduire $P(M/E)$ avec la formule de la définition précédente.

3) Retrouver ce résultat sans utiliser la formule du cours.

Solutions

1) On est dans une situation d'équiprobabilité donc

$$p(E) = \frac{1095}{1200} = 0,9125 \text{ et } p(E \cap M) = \frac{657}{1200} = 0,5475$$

$$2) p(M/E) = \frac{p(M \cap E)}{p(E)} = \frac{0,5475}{0,9125} = 0,6$$

3) On sait que la personne choisie est un élève donc l'univers se réduit à l'ensemble

des élèves seulement (on s'intéresse seulement à la première ligne du tableau) donc

$$p(M/E) = \frac{657}{1095} = 0,6$$

Propriété

Soit $(E, \mathcal{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini.

A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$

$$p(A \cap B) = p(B) \times p(A/B) = p(A) \times p(B/A)$$

Cette formule est appelée **Formule des probabilités composées**

Remarques

La formule des probabilités composées peut s'étendre à trois événements A, B et C tels que $p(A) \neq 0$ et $p(A \cap B) \neq 0$ de la façon suivante:

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p(B/A) \times p(C/A \cap B)$$

Exemple 2

Une urne contient sept boules noires et cinq boules blanches.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise (sans remettre à chaque fois la boule tirée dans l'urne) trois boules de l'urne,

Déterminer les probabilités des événements suivants:

A : "La première boule noire apparaît au troisième tirage."

B : "Seulement, les deux dernières boules tirées sont de même couleur."

Solutions

Considérons les événements suivants

N_i : "La boule tirée au i-ème tirage est noire." avec $1 \leq i \leq 3$

B_i : "La boule tirée au i-ème tirage est blanche." avec $1 \leq i \leq 3$

A est réalisé si les boules tirées sont dans l'ordre :

boule blanche au premier tirage, boule blanche au deuxième tirage et puis boule noire au troisième tirage. Donc on peut écrire

$$\begin{aligned} p(A) &= p(B_1 \cap B_2 \cap N_3) \\ &= p(B_1) \times p(B_2/B_1) \times p(N_3/B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{7}{10} \approx 0,11 \end{aligned}$$

B est réalisé si les boules tirées sont dans l'ordre :

boule blanche au premier tirage, boule noire au deuxième tirage et puis boule noire au troisième tirage ou boule noire au premier tirage, boule blanche au deuxième tirage et puis boule blanche au troisième tirage. Donc on peut écrire

$$\begin{aligned}
 p(B) &= p((B_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap B_3)) \\
 &= p(B_1) \times p(B_2/B_1) \times p(N_3/B_1 \cap B_2) \\
 &\quad + p(N_1) \times p(N_2/N_1) \times p(B_3/N_1 \cap N_2) \\
 &= \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{7}{10} + \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \\
 &= 0,265152
 \end{aligned}$$

● Formule des probabilités totales

Propriété

Soit $(E, \mathcal{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini.

A et B deux événements tels que $p(B) \neq 0$ et $p(B) \neq 1$

$$\begin{aligned}
 p(A) &= p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) \\
 &= p(B) \times p(A/B) + p(\bar{B}) \times p(A/\bar{B})
 \end{aligned}$$

D'une manière plus générale, si $B_1, B_2, \dots$ et B_n forment un système complet de l'univers E (c-à-d deux à deux incompatibles et tels que $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = E$) et de probabilités non nulles alors pour tout événement A:

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n p(B_i) \times p(A/B_i)$$

Démonstration

$$A = A \cap E = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \text{ avec } (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$$

Donc $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(B) \times p(A/B) + p(\bar{B}) \times p(A/\bar{B})$ (probabilités composées)

De même on a : $A = A \cap E = A \cap (\bigcup_{i=1}^n B_i) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$ ce qui donne

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n p(B_i) \times p(A/B_i) \text{ car les événements } A \cap B_i \text{ sont 2 à 2 incompatibles}$$

Exemple 3

Dans une ville, 40% de la population a les cheveux blonds, 50% les yeux bleus et 35% les cheveux blonds et les yeux bleus. On choisit une personne au hasard.

Quelle est la probabilité :

- 1) pour qu'elle ait les yeux bleus, sachant qu'elle a les cheveux blonds ?
- 2) pour qu'elle n'ait pas les cheveux blonds, sachant qu'elle a les yeux bleus ?

Solutions

Considérons les événements :

C : "La personne choisie a les cheveux blonds".

O : "La personne choisie a les yeux bleus".

$$1) p(O/C) = \frac{p(O \cap C)}{p(C)} = \frac{0,35}{0,40} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8} = 0,875$$

$$2) p(\bar{C}/O) = \frac{p(\bar{C} \cap O)}{p(O)} \text{ or d'après la formule des probabilités totales on sait que}$$

$$p(O) = p(C \cap O) + p(\bar{C} \cap O) \text{ ce qui donne}$$

$$p(\bar{C} \cap O) = p(O) - p(C \cap O) = 0,5 - 0,35 = 0,15$$

$$\text{Donc } p(\bar{C}/O) = \frac{0,15}{0,5} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Exemple 4

Lors d'un concours la première épreuve est une épreuve de mathématiques, la deuxième épreuve est une épreuve de sciences physiques.

Un élève a 80% de chance de réussir la première épreuve, s'il réussit la première épreuve il aura 75% de chance de réussir la deuxième épreuve, et s'il ne réussit pas la première épreuve il aura 40% de chance de réussir la deuxième épreuve.

On désigne par M l'événement « l'élève réussit la première épreuve » et par S l'événement « l'élève réussit la deuxième épreuve ».

Déterminer $p(M)$, $p(S/M)$, $p(S/\bar{M})$ et $p(S)$

Solutions

D'après les données on a: $p(M) = \frac{80}{100} = 0,8$, $p(S/M) = \frac{75}{100} = 0,75$ et

$$p(S/\bar{M}) = \frac{40}{100} = 0,4$$

D'après la formule des probabilités totales on a:

$$\begin{aligned} p(S) &= p(S \cap M) + p(S \cap \bar{M}) \\ &= p(M) \times p(S/M) + p(\bar{M}) \times p(S/\bar{M}) \\ &= 0,8 \times 0,75 + (1 - 0,8) \times 0,4 = 0,68 \end{aligned}$$

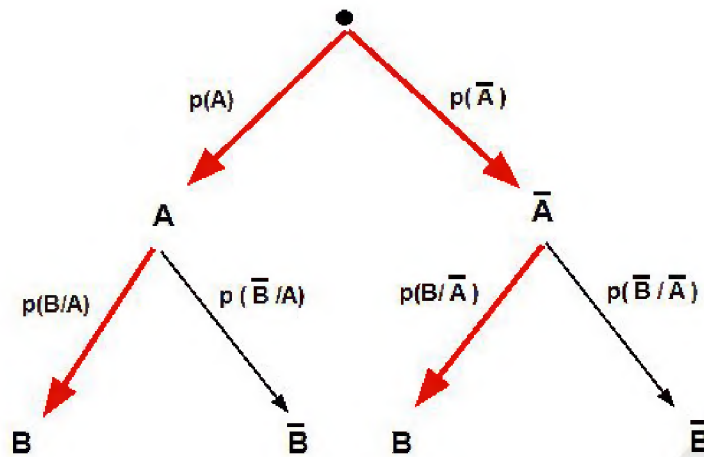


II. Arbre pondéré

On peut représenter une situation par un arbre pondéré.

- ❖ La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin (Règle qui reflète la formule des probabilités composées)
- ❖ la probabilité d'un événement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser cet événement (Règle qui reflète la formule des probabilités totales)

Règle des nœuds : la somme des probabilités affectées aux branches qui partent d'un même nœud est égale à 1.



Interprétation

* L'événement $A \cap B$ est représenté par le chemin : $\bullet \rightarrow A \rightarrow B$

La probabilité de ce chemin est le produit des probabilités des branches, ce qui exprime $p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$

De même pour les autres chemins:

$A \cap \bar{B}$ représenté par le chemin $\bullet \rightarrow A \rightarrow \bar{B}$

$\bar{A} \cap B$ représenté par le chemin $\bullet \rightarrow \bar{A} \rightarrow B$

$\bar{A} \cap \bar{B}$ représenté par le chemin $\bullet \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{B}$

* La probabilité de B est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser cet événement (les chemins $\bullet \rightarrow A \rightarrow B$ et $\bullet \rightarrow \bar{A} \rightarrow B$).

Ce qui donne $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

* La règle des nœuds exige les égalités suivantes:

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

$$p(B/A) + p(\bar{B}/A) = 1$$

$$p(B/\bar{A}) + p(\bar{B}/\bar{A}) = 1$$

Exemple 5

Un fabricant d'ampoules possède deux machines A et B. La machine A fournit 65% de la production, et la machine B fournit le reste.

Certains ampoules présentent un défaut de fabrication:

- à la sortie de la machine A, 8% des ampoules présentent un défaut;
- à la sortie de la machine B, 5% des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants:

A: "l'ampoule provient de la machine A"

B: "l'ampoule provient de la machine B"

D: "l'ampoule présente un défaut"

On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

1) Construire un arbre pondérée présentant la situation

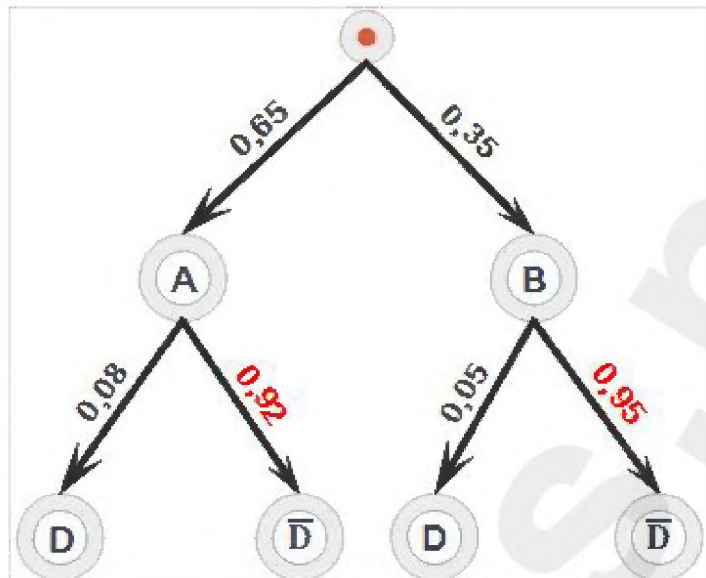
2) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305

3) L'ampoule est sans défaut.

Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

Solutions

1)



2) D'après la formule des probabilités totales on a:

$$\begin{aligned} p(\bar{D}) &= p(A \cap \bar{D}) + p(B \cap \bar{D}) \\ &= p(A) \times p(\bar{D}/A) + p(B) \times p(\bar{D}/B) \\ &= 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,95 = 0,9305 \end{aligned}$$

$$3) p(A/\bar{D}) = \frac{p(A \cap \bar{D})}{p(\bar{D})} = \frac{p(A) \times p(\bar{D}/A)}{p(\bar{D})} = \frac{0,65 \times 0,92}{0,9305} \simeq 0,643$$

Exemple 6

Pierre et Claude jouent au Tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans la suite n est un entier naturel non nul.

On considère les événements :

G_n : "Pierre gagne la n -ième partie"

P_n : "Pierre perd la n -ième partie"

On pose $p_n = p(G_n)$ et $q_n = p(P_n)$

1) Recherche d'une relation de récurrence.

a) Déterminer p_1 puis $p(G_2/G_1)$ et $p(G_2/P_1)$.

b) Construire un arbre pondéré qui exprime les deux premières parties et calculer $p(G_2)$

c) Justifier l'égalité $p_n + q_n = 1$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n ; $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$

2) Etude de la suite (p_n)

On pose pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - 0,4$

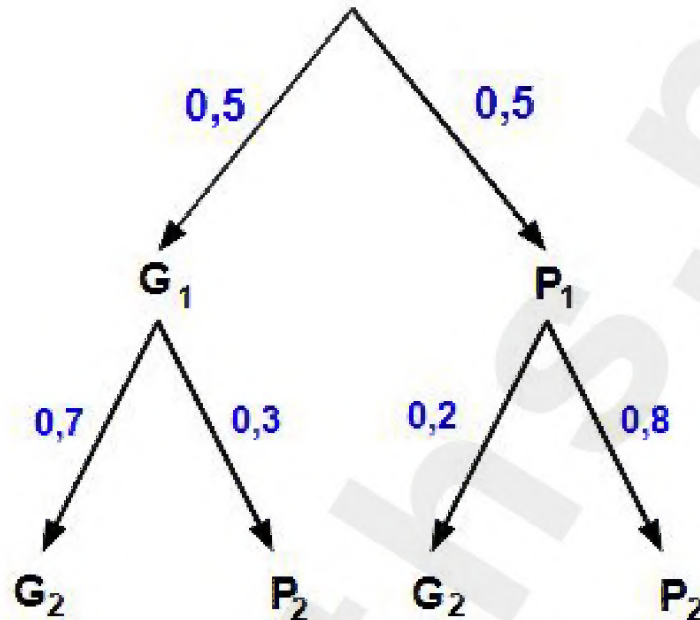
- a)** Prouver que (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n .
b) En déduire p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Solutions

1) a) D'après l'énoncé on a :

$$p_1 = p(G_1) = 0,5, \quad p(G_2/G_1) = 0,7 \text{ et } p(G_2/P_1) = 1 - 0,8 = 0,2$$

b)



$$p(G_2) = p(G_2 \cap G_1) + p(G_2 \cap P_1) = p(G_1) \times p(G_2/G_1) + p(P_1) \times p(G_2/P_1) = 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 = 0,45$$

c) Dans chaque partie du jeu, l'un des deux joueurs va gagner la partie c-à-d Pierre gagne ou perd la partie (il n'y a pas de match nul) donc les événements G_n et P_n forment une partition de l'univers et par la suite $p_n + q_n = 1$

d) Les événements G_n et P_n forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on peut écrire

$$\begin{aligned} p(G_{n+1}) &= p(G_{n+1} \cap G_n) + p(G_{n+1} \cap P_n) \\ &= p(G_n) \times p(G_{n+1}/G_n) + p(P_n) \times p(G_{n+1}/P_n) \\ &= 0,7 \times p_n + q_n \times 0,2 \\ &= 0,7 \times p_n + (1 - p_n) \times 0,2 \\ &= 0,5p_n + 0,2 \end{aligned}$$

2) a) $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,4 = (0,5p_n + 0,2) - 0,4 = 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 = 0,5v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n &= v_1(0,5)^{n-1} \\ &= (p_1 - 0,4)(0,5)^{n-1} \\ &= 0,1 \times (0,5)^{n-1} \end{aligned}$$

b) $v_n = p_n - 0,4 \iff p_n = v_n + 0,4 = 0,1 \times (0,5)^{n-1} + 0,4$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^{n-1} = 0$ car $0,5 \in]-1, 1[$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,4$



III. Événements indépendants

Définition

On dit que A et B sont indépendants si, et seulement si, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Remarques

1) Attention à ne pas confondre indépendant et incompatible (qui est synonyme de disjoint c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$ et non pas $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$).

2) Si $p(A) \neq 0$ (ou $p(B) \neq 0$) alors A et B sont indépendants si, et seulement si, $p(B/A) = p(B)$ (ou $p(A/B) = p(A)$).

$p(B/A) = p(B)$ traduit le fait que savoir que A est réalisé ne modifie pas la probabilité de B, autrement dit, que la réalisation de A n'a pas d'influence sur la réalisation de B.

Exemple 7

Dans la population, il y a 71% de porteurs de lunettes parmi lesquels 37% ont 55 ans ou plus. Dans la population, il y a 63% de personnes de moins de 55 ans.

On tire au sort une personne dans la population et on considère les deux événements :

A : « la personne a 55 ans ou plus ».

L : « la personne porte des lunettes ».

Les événements A et L sont-ils indépendants ?

Solutions

D'après l'énoncé, $p(L) = 0,71$; $p(A) = 1 - 0,63 = 0,37$ et $p(A/L) = 0,37$

Donc $p(A) \times p(L) = 0,37 \times 0,71 = 0,2627$ et

$p(A \cap L) = p(L) \times p(A/L) = 0,71 \times 0,37 = 0,2627$

Exemple 8

Une urne U contient trois boules noires et six boules vertes.

Une urne V contient deux boules noires et trois boules vertes.

On choisit une urne au hasard et on tire successivement deux boules, en remettant chaque fois la boule, dans l'urne choisie.

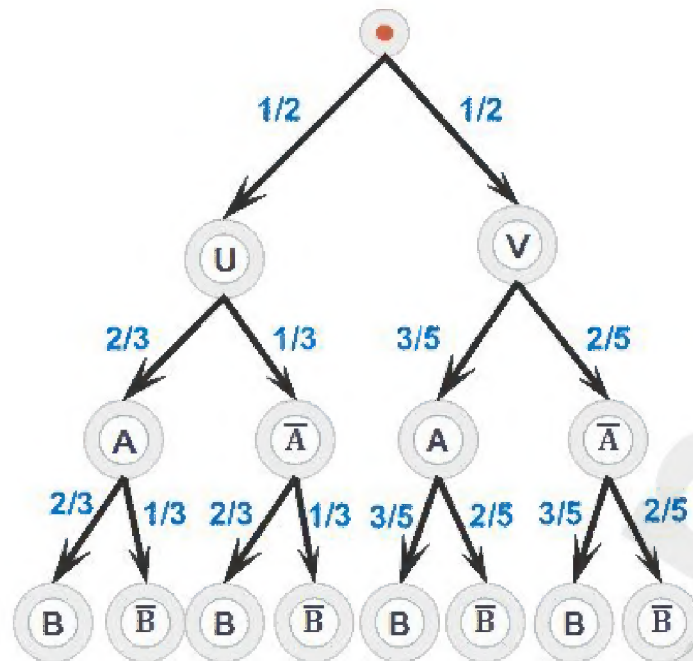
On considère les événements : A « obtenir une boule verte au premier tirage » et B « obtenir une boule verte au deuxième tirage ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Solutions

Considérons les événements U « le tirage se fait dans l'urne U » et V « le tirage se fait dans l'urne V »

On peut résumer la situation à l'aide d'un arbre pondérée



En utilisant l'arbre pondérée on a:

$$\begin{aligned}
 p(A) &= p(U) \times p(A/U) + p(V) \times p(A/V) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{19}{30}
 \end{aligned}$$

Sachant que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement et que la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches de ce chemin, on peut alors écrire:

$$\begin{aligned}
 p(B) &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \frac{2}{5} \frac{3}{5} \\
 &= \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{9}{50} + \frac{6}{50} \\
 &= \frac{3}{9} + \frac{15}{50} \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{19}{30}
 \end{aligned}$$

$p(A \cap B)$: « Les deux boules tirées sont vertes »

Les chemins à suivre sur l'arbre pondérée pour que cet événement soit réalisé sont:

• $\rightarrow U \rightarrow A \rightarrow B$ ou • $\rightarrow V \rightarrow A \rightarrow B$ donc

$$p(A \cap B) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{362}{900} \text{ et on a: } p(A) \times p(B) = \left(\frac{19}{30}\right)^2 = \frac{361}{900}$$

$p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.