Épreuve : Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°2

4ème Maths

Professeur : Dhaouadi Nejib

1 Exercice n°1 — 8,5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2,2]$ par : $f(x)=\sqrt{4-x^2}-x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I - ① a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -2 et interpréter graphiquement le résultat trouvé.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 et interpréter graphiquement le résultat trouvé.

② a) Montrer que f est dérivable sur $]-2,2[$ et que $\forall x\in]-2,2[$;

$$f'(x)=-\frac{x+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2x^2-4}{\sqrt{4-x^2}\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)}.$$

b) Drésser le tableau de variation de f.

③ a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Tracer T et $\mathscr{C}$.

④ On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $\left[-\sqrt{2},2\right]$.

a) Montrer que g est une bijection de $\left[-\sqrt{2},2\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de g^{-1} dans le même repère que $\mathscr{C}$.

II - ① a) Donner une équation cartésienne du cercle Γ de centre O et de rayon 2.

b) Montrer que $\Gamma=\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2$ où $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux courbes dont – on précisera les équations cartésiennes.

② a) En utilisant les résultats de la question précédente, Interpréter graphiquement l'intégrale $I=\int_{-2}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$ et vérifier que $I=\frac{3\pi}{2}+1$.

b) En déduire l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $y=0$, $x=-2$ et $x=\sqrt{2}$.

III- (Cette partie sera traitée seulement pendant la correction du devoir.)

On se propose dans cette partie de calculer l'intégrale $I=\int_{-2}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Considérons la fonction φ définie sur l'intervalle $[-2;2]$ par : $\varphi(x)=\sqrt{4-x^2}$

et F l'unique primitive de φ, sur $[-2,2]$, qui s'annule en -2.

Soit G la fonction définie sur $[0,\pi]$ par : $G(x)=F(2\cos x)$.

① Montrer que G est dérivable sur $[0,\pi]$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x\in[0,\pi]$.

② En remarquant que G est l'unique primitive de G' qui s'annule en π, montrer que pour tout $x\in[0,\pi]$, $G(x)=2\pi+\sin 2x-2x$.

③ Conclure.

2 Exercice n°2 5,5 points

Soit la suite réelle (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$

① Vérifier que $I_0=\dfrac{2}{3}$.

② a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que (I_n) est convergente et préciser sa limite.

③ À l'aide d'une integration par partie, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :
$(2n+5)I_{n+1}=(2n+2)I_n$.

④ À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :
$I_n=\dfrac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$.

3 Exercice n°3 6 points

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Soit E le symétrique de O par rapport à B, I le milieu de $[AB]$ et J le symétrique de O par rapport à I.

① a) Faites une figure.

b) Montrer qu'il existe un seul déplacement f vérifiant $f(A)=O$ et $f(C)=E$.

c) Montrer que f est une rotation dont – on précisera l'angle.

② a) Montrer que $f(B)=J$.

b) En déduire le centre de la rotation f.

③ Soit g l'unique antidéplacement vérifiant $g(A)=O$ et $g(C)=E$.
Montrer que g est une symétrie glissante et préciser ses éléments caractéristiques.

④ On pose $h=gof^{-1}$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.

b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)=g(M)$.

CORRECTION DU DEVOIR

1 Exercice n°1

I - ① $a)$ $\displaystyle\lim_{x\to-2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2^+}\frac{\sqrt{4-x^2}-x-2}{x+2}=\lim_{x\to-2^+}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}-1=\lim_{x\to-2^+}\frac{4-x^2}{(x+2)\sqrt{4-x^2}}-1$

$$=\lim_{x\to-2^+}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)\sqrt{4-x^2}}-1=\lim_{x\to-2^+}\frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}-1=+\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en -2 et la courbe $\mathscr{C}$ admet, au point d'abscisse -2 une demi-tangente verticale.

$b)$ $\displaystyle\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}-x+2}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}-1=\lim_{x\to2^-}\frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}-1$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}-1=\lim_{x\to2^-}\frac{-2-x}{\sqrt{4-x^2}}-1=-\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2 et la courbe $\mathscr{C}$ admet, au point d'abscisse 2 une demi-tangente verticale.

② $a)$ *La donction $x\mapsto 4-x^2$ est dérivable (comme fonction polynome) et strictement positive sur l'intervalle $]-2,2[$ donc f est dérivable sur $]-2,2[$*

et $\forall x\in\,]-2,2[\,;\; f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}-1=-\dfrac{x+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}=-\dfrac{(x+\sqrt{4-x^2})(x-\sqrt{4-x^2})}{\sqrt{4-x^2}\left(x-\sqrt{4-x^2}\right)}$

$$=-\frac{x^2-4+x^2}{\sqrt{4-x^2}\left(x-\sqrt{4-x^2}\right)}=\frac{2x^2-4}{\sqrt{4-x^2}\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)}.$$

$b)$ *Pour* $x>0,\ f'(x)=-\dfrac{x+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}<0.$

Pour $x<0,\ f'(x)=\dfrac{2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)}$ *donc $f'(x)$ admet le signe de x^2-2*

x	-2		$-\sqrt{2}$		0		2
$f'(x)$		+	0	-	-1	-	
$f(x)$	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘		↘	-2

③ $a)$ $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$ *donc* $\boxed{T: y=-x+2}$

$b)$ *Traçage de T et $\mathscr{C}$. (Voir figure)*

④ *On désigne par g la restriction de f à l'intervalle* $\left[-\sqrt{2},2\right]$.

a) g est continue et strictement décroissante sur $\left[-\sqrt{2},2\right]$

donc g réalise une bijection de $\left[-\sqrt{2},2\right]$ sur $g\left(\left[-\sqrt{2},2\right]\right)=\left[-2,2\sqrt{2}\right]=J$.

b) Soit $x\in J$, il existe et unique $y\in I$ tel que $g(y)=x$ ou encore $y=g^{-1}(x)$

$g(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{4-y^2}-y=x \Leftrightarrow x+y=\sqrt{4-y^2} \Leftrightarrow (x+y)^2=4-y^2$

$\Leftrightarrow 2y^2+2xy+x^2-4=0$ avec $\Delta=(2x)^2-8(x^2-4)=4(8-x^2)\geq 0$

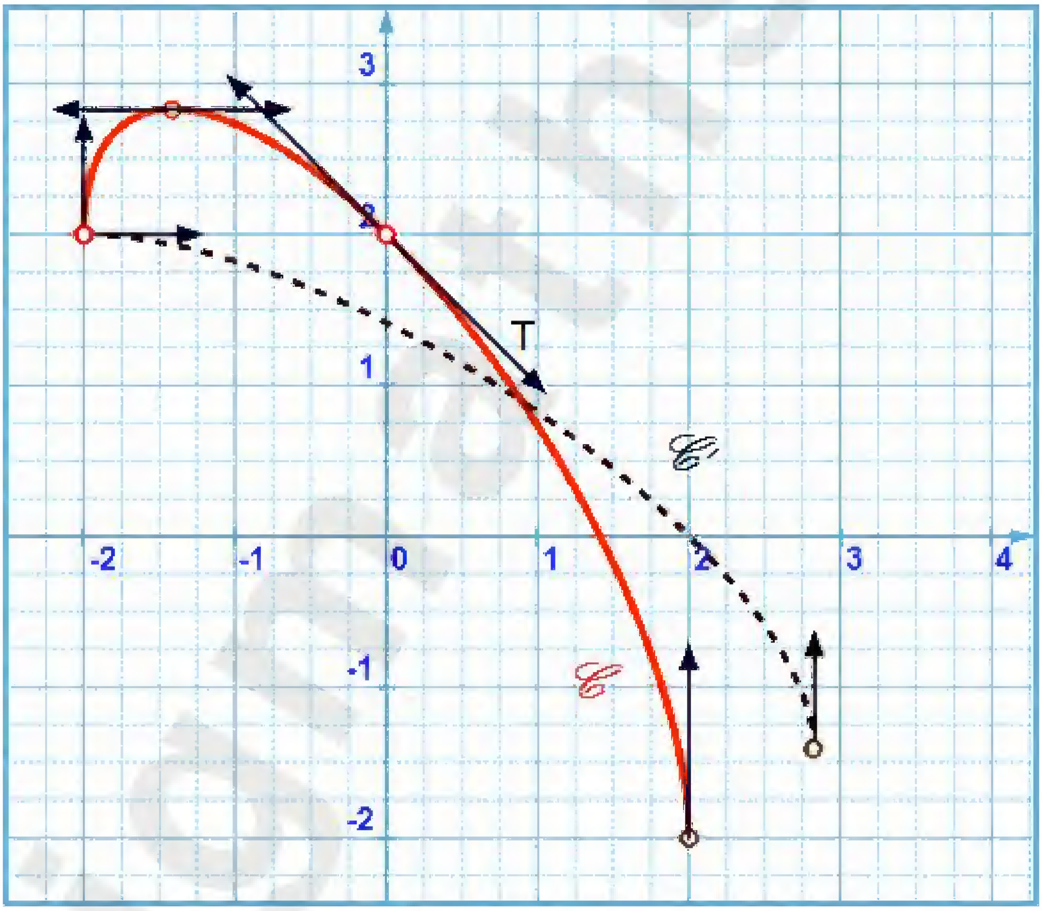
Donc les solutions sont :

$$y'=\frac{-2x-2\sqrt{8-x^2}}{4}=\frac{-x-\sqrt{8-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad y''=\frac{-2x+2\sqrt{8-x^2}}{4}=\frac{-x+\sqrt{8-x^2}}{2}.$$

On a $g(0)=2$ donc $g^{-1}(2)=0$ or pour $x=2$ on a $y'=-2$ et $y''=0$

Donc $\boxed{\forall x\in J,\ g^{-1}(x)=\dfrac{-x+\sqrt{8-x^2}}{2}}$

c) $\mathscr{C}'$ est le symétrique de la représentation graphique de g (la partie de la courbe $\mathscr{C}$ qui correspond à l'intervalle $\left[-\sqrt{2},2\right]$)



II - ① a) Une équation cartésienne du cercle Γ de centre O et de rayon 2 est :

$x^2+y^2=4$.

b) $M(x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow x^2+y^2=4 \Leftrightarrow y^2=4-x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{4-x^2}$ ou $y=-\sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow M(x,y)\in\mathscr{C}_1$ d'équation $y=\sqrt{4-x^2}$ ou $M(x,y)\in\mathscr{C}_2$ d'équation $y=-\sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow M(x,y)\in\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2$ où :

$\mathscr{C}_1$ *est le demi – cercle de centre O et de rayon 2 situé dans le demi – plan au dessus de l'axe des abscisses* $\{M(x,y)\ tel\ que\ y \geq 0\}$

$\mathscr{C}_2$ *est le demi – cercle de centre O et de rayon 2 situé dans le demi – plan au dessous de l'axe des abscisses* $\{M(x,y)\ tel\ que\ y \leq 0\}$.

2) a) $\int_{-2}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,dx$ *est l'aire de la région délimitée par le demi-cercle* $\mathscr{C}_1$, *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=-2$ *et* $x=\sqrt{2}$

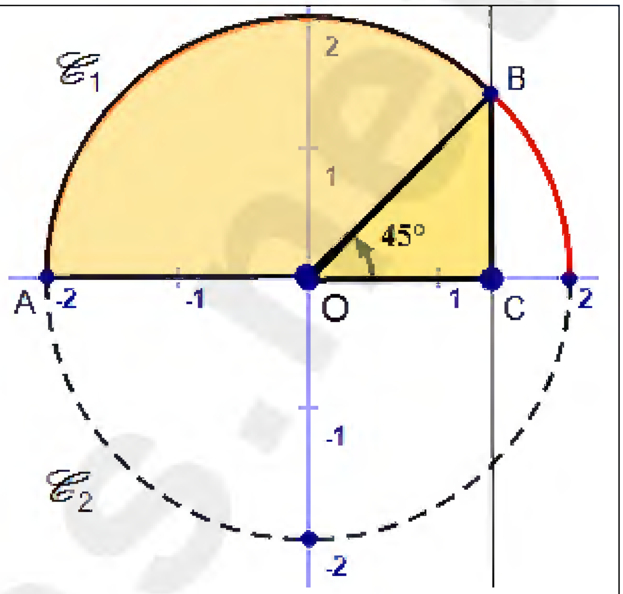
Cette région est la réunion du secteur circulaire OAB et le triangle OCB.

L'aire du secteur circulaire OAB

$$= L'aire\ du\ cercle \times \frac{3}{8} = 4\pi \times \frac{3}{8} = \frac{3\pi}{2}$$

$$L'aire\ du\ triangle\ OCB = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1$$

$$Donc\ \int_{-2}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{3\pi}{2} + 1$$



b) Soit $\mathscr{A}$ *l'aire de la region délimitée par la courbe* $\mathscr{C}$, *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=-2$ *et* $x=\sqrt{2}$.

$$\mathscr{A} = \int_{-2}^{\sqrt{2}} |f(x)|\,dx = \int_{-2}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2} - x\right)dx$$

III- (Hors devoir.)

Soit G la fonction définie sur $[0,\pi]$ *par :* $G(x) = F(2\cos x)$.

① $\begin{cases} La\ fonction\ x \mapsto 2\cos x\ est\ dérivable\ sur\ [0,\pi] \\ La\ fonction\ F\ est\ dérivable\ sur\ [-2,2]\ (primitive\ de\ \varphi\ sur\ [-2,2]) \\ \forall x \in [0,\pi],\ \cos x \in [-1,1]\ donc\ 2\cos x \in [-2,2] \end{cases}$

Donc G est dérivable sur $[0,\pi]$ *et* $\forall x \in [0,\pi]$,

$$G'(x) = -2\sin x.F'(2\cos x) = -2\sin x.\varphi(2\cos x) = -2\sin x\sqrt{4-(2\cos x)^2}$$

$$= -4\sin x\sqrt{1-\cos^2 x} = -4\sin x.|\sin x| = -4\sin^2 x\ car\ \sin x \geq 0\ car\ x \in [0,\pi]$$

② *G est l'unique primitive de G' sur* $[0,\pi]$ *qui s'annule en* π

$$donc\ \forall x \in [0,\pi],\ G(x) = \int_\pi^x G'(t)dt = -4\int_\pi^x \sin^2 t\ dt = -4\int_\pi^x \frac{1-\cos 2t}{2} = -4\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_\pi^x$$

$$= -4\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi + \sin 2x - 2x$$

③ *On a :* $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = F\left(\sqrt{2}\right) = \int_{-2}^{\sqrt{2}} \varphi(x)dx$ *car :*

F *l'unique primitive de* φ *sur* $[-2,2]$, *qui s'annule en* -2

$\Leftrightarrow \forall x \in [-2,2], F(x) = \int_{-2}^{x} \varphi(t)\, dt.$

Donc $\int_{-2}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}dx = G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2.\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 1.$

2 Exercice n°2

Soit la suite réelle (I_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$

① $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx = -\int_0^1 (-1)\sqrt{1-x}\, dx = -\left[\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 = -\left(0 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$

② a) *Soit* $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall x \in [0,1] : 0 \le 1-x \le 1 \Rightarrow 0 \le \sqrt{1-x} \le 1 \Rightarrow 0 \le x^n\sqrt{1-x} \le x^n$

Donc $0 \le \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx \le \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}.$

Et aussi pour $n = 0$ *on a :* $0 \le I_0 = \frac{2}{3} \le \frac{1}{0+1} = 1$. *Donc* $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}.$

b) *On a* $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ *donc* (I_n) *est convergente et* $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

③ *Soit* $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\, dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} & \Rightarrow u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = \sqrt{1-x} & \Leftarrow v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

Alors $I_{n+1} = \left[-\frac{2}{3}x^{n+1}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 (x^n - x^{n+1})\sqrt{1-x}\, dx$

$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)\left(\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\, dx - \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\, dx\right) = \frac{2}{3}(n+1)I_n - \frac{2}{3}(n+1)I_{n+1}$

$\Leftrightarrow 3I_{n+1} = 2(n+1)I_n - (2n+2)I_{n+1} \Leftrightarrow (2n+2+3)I_{n+1} = (2n+2)I_n$

$\Leftrightarrow (2n+5)I_{n+1} = 2(n+1)I_n.$

Pour $n = 0$, *on vérifie aussi que* $5I_1 = 2I_0$.

④ *Pour* $n = 0$, *on a :* $I_0 = \frac{2^2.0!1!}{3!} = \frac{2\times2\times1\times1}{1\times2\times3} = \frac{2}{3}$ *ce qui est vrai.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, *Supposons que* $I_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$ *et montrons que* $I_{n+1} = \frac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!}{(2n+5)!}$.

On a : $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5}I_n = \frac{2(n+1)2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+5)(2n+3)!} = \frac{2^{2n+3}(n+1)!(n+1)!}{(2n+5)(2n+3)!}$ *car* $(n+1)! = n!(n+1)$

Donc $I_{n+1} = \frac{2^{2n+3}(n+1)!(n+1)!}{(2n+5)(2n+3)!}.\frac{2(n+2)}{2(n+2)} = \frac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!}{(2n+3)!(2n+4)(2n+5)} = \frac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!}{(2n+5)!}$

car $(n+1)!(n+2) = (n+2)!$ *et* $(2n+3)!(2n+4)(2n+5) = (2n+5)!$

3 Exercice n°3

① a) *Voir figure ci-dessous*

b) $E = S_B(O)$ *donc* $BE = BO$ *et* $EO = 2BO = BD = AC$

$AC = OE \neq 0$ *donc il existe un seul déplacement* f *vérifiant* $f(A) = O$ *et* $f(C) = E$.

c) L'angle θ du déplacement f est tel que : $\theta \equiv (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OE}) \equiv (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

f est un déplacement d'angle θ non nul donc c'est une rotation d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

② a) $-\frac{\pi}{2}$ est l'angle de f donc l'image d'une droite est une droite qui lui est perpendiculaire.

$f((AB))$ est la perpendiculaire à (AB) passant par $f(A) = O \Rightarrow f((AB)) = (OJ)$

$f((BC))$ est la perpendiculaire à (BC) passant par $f(C) = E \Rightarrow f((BC)) = (EJ)$

car Dans le triangle OEJ, $B = O * E$ et $I = O * J \Rightarrow (EJ) \parallel (BI)$ donc $(EJ) \perp (BC)$.

On a : $\{B\} = (AB) \cap (BC) \Rightarrow \{f(B)\} = f((AB)) \cap f((BC)) = (OJ) \cap (EJ) = \{J\}$

Donc $f(B) = J$.

b) $I = A * B$ et on sait qu'une isométrie conserve le milieu $\Rightarrow f(I) = f(A) * f(B) = O * J = I$

$f(I) = I$ donc I est le centre de la rotation f.

③ g est un antidéplacement donc g est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante. Supposons que g est une symétrie orthogonale d'axe Δ

On a : $g(A) = O$ et $g(C) = E$ donc $\Delta = med[OA] = med[CE]$ ce qui est impossible

Donc g est une symétrie glissante. Soit Δ son axe et $\vec{u}$ son vecteur

$g(A) = O$ et $g(C) = E \Rightarrow A * O = K \in \Delta$ et $C * E = L \in \Delta$ donc $\boxed{\Delta = (KL)}$ (voir figure)

$g(A) = S_{(KL)} o t_{\vec{u}}(A) = S_{(KL)}(t_{\vec{u}}(A)) = O = S_{(KL)}(I) \Rightarrow t_{\vec{u}}(A) = I \Rightarrow \boxed{\vec{u} = \overrightarrow{AI}}$

④ On pose $h = gof^{-1}$.

a) gof^{-1} est la composé d'un déplacement f^{-1}(car la réciproque d'un déplacement est un déplacement) et d'un antidéplacement g donc c'est un antidéplacement.

Et on a : $gof^{-1}(O) = g\left(f^{-1}(O)\right) = g(A) = O$ et $gof^{-1}(E) = g\left(f^{-1}(E)\right) = g(C) = E$

Alors gof^{-1} est un antidéplacement qui fixe deux points distincts O et E

Donc gof^{-1} est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

b) $gof^{-1} = S_{(OE)} \Leftrightarrow g = S_{(OE)} of$ et on a $f((AC)) = (OE)$

$f(M) = g(M) \Leftrightarrow f(M) = S_{(OE)}(f(M)) \Leftrightarrow f(M) \in (OE) \Leftrightarrow M \in (AC)$.

Donc l'ensemble des points M tels que $f(M) = g(M)$ est la droite (AC).