Épreuve : Mathématiques **Durée :** 3H	**Devoir de synthèse n°1** ◉○◉○◉ **4ème Maths**	**Professeur :** Dhaouadi Nejib

1 Exercice n°1 4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Pour chacune des questions suivantes, Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondante à la seule réponse correcte.

1) *Soit z un nombre complexe tel que $\bar{z}+|z|=6+2i$. L'écriture algébrique de z est :*

a) $\frac{8}{3}-2i$ *b)* $-\frac{8}{3}-2i$ *c)* $\frac{8}{3}+2i$ *d)* $-\frac{8}{3}+2i$

2) *Soit $n\in\mathbb{N}$. Le nombre $(1+i\sqrt{3})^n$ est réel si, et seulement si, n s'écrit sous la forme :*

a) $3k+1$ *b)* $3k+2$ *c)* $3k$ *d)* $6k$

3) *On appelle A et B les points d'affixes respectives i et $\sqrt{3}$. L'affixe z_C du point C tel que ABC est un triangle équilateral direct est :*

a) $-i$ *b)* $2i$ *c)* $\sqrt{3}+i$ *d)* $\sqrt{3}+2i$

4) *L'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$, où x et y des réels, telles que $\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ est inclus dans :*

a) La droite d'équation $y=-x$.

b) La droite d'équation $y=x$

c) Le cercle de centre I d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$

d) Le cercle de diamètre $[AB]$ où A et B sont les points d'affixes respectives -2 et 2i

2 Exercice n°2 5,5 points

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{1+2u_n}}$.

1) ⓐ *Montrer que pour tout entier naturel n, $0<u_n\leq 1$.*

ⓑ *Montrer que la suite (u_n) est décroissante.*

ⓒ *En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.*

2) *À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.*

3) *Soit* f *la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par* : $f(x)=\dfrac{2}{1+\sqrt{1+2x}}$.

ⓐ *Montrer que* f *est décroissante sur* $[0,+\infty[$.

ⓑ *Vérifier que* : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}=f(u_n)$.

ⓒ *Montrer alors que pour tout entier non nul* n *on a* : $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\le\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\le 1$.

4) ⓐ *Montrer que pour tout entier* $n\ge 4$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\le\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\le 1$.

ⓑ *Retrouver alors la limite de la suite* (u_n).

3 Exercice n°3 — 4,5 points

1) *Soit* g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* : $g(x)=3x-2\cos x$.

ⓐ *Montrer que pour tout réel* x, $\quad 3x-2\le g(x)\le 3x+2$.

En déduire les limites de g *en* $-\infty$ *et* $+\infty$.

ⓑ *Montrer que l'équation* $g(x)=0$ *admet, dans* $\mathbb{R}$, *une seule solution* α *et que* $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.

ⓒ *Donner le signe de* g *sur* $\mathbb{R}$.

2) *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$ *par* : $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-\alpha}$

ⓐ *A l'aide de deux encadrements, pour* $x<\alpha$ *et* $x>\alpha$, *déterminer les limites de* f *en* $-\infty$ *et* $+\infty$.

ⓑ *Pour tout réel* x, *on pose* $h=x-\alpha$.

Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\alpha\},\ f(x)=3+3\alpha\dfrac{1-\cos h}{h}+2\sin\alpha.\dfrac{\sin h}{h}$.

ⓒ *En déduire que* f *est prolongeable par continuité en* α *et définir son prolongement*

4 Exercice n°4 — 6 points

Partie A

On pose $P(z)=z^3-5iz^2-(7+4i)z-12+3i$

1) *Montrer que l'équation* $P(z)=0$ *admet, dans* $\mathbb{C}$, *une solution imaginaire* z_0 *que l'on précisera.*

2) *Déterminer les nombres complexes* b *et* c *tels que* : $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z-3i)(z^2+bz+c)$.

3) *Résoudre, dans* $\mathbb{C}$, *l'équation* $P(z)=0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points A d'affixe $z_A = 3i$, *B d'affixe* $z_B = -\sqrt{2} + i\left(1-\sqrt{2}\right)$, *C d'affixe* $z_C = \sqrt{2} + i\left(1+\sqrt{2}\right)$ *et I le milieu du segment* $[BC]$ (*on note* z_I *son affixe*).

1) ⓐ *Calculer* z_I *et donner la forme algébrique du nombre complexe* $\dfrac{z_A - z_I}{z_C - z_I}$ *en déduire que le triangle AIC est isocèle et donner une mesure de l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}})$.

ⓑ *Montrer que ABC est un triangle rectangle en A.*

ⓒ *Dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$, *placer le point A, tracer le cercle circonscrit au triangle ABC et puis placer les points B et C.*

2) *On pose* $w = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

ⓐ *Déterminer une mesure de l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$.

ⓑ *Calculer* $\dfrac{BA}{BC}$ *et déduire la forme trigonométrique de w.*

ⓒ *Donner la forme algébrique de w et déduire* $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

L'énoncé du devoir en 3 pages et la correction en 5 pages.

CORRECTION DU DEVOIR

1 Exercice n°1

1) a)	2) c)	3) c)	4) d)

1) On pose $z = x + iy$ où x et y des réels

$\bar{z} + |z| = 6 + 2i \Leftrightarrow x - iy + \sqrt{x^2 + y^2} = 6 + 2i \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + y^2} - iy = 6 + 2i \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + y^2} = 6$ et $y = -2 \Leftrightarrow y = -2$ et $x + \sqrt{x^2 + 4} = 6 \Leftrightarrow y = -2$ et $(x-6)^2 = x^2 + 4 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$ et $y = -2$.

Donc $z = \frac{8}{3} - 2i$.

2) $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (1 + i\sqrt{3})^n = 2e^{i\frac{n\pi}{3}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 3k, k \in \mathbb{Z}$

3) Le triangle ABC est équilateral direct $\Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} \; [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3} \; [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C - i}{\sqrt{3} - i}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{z_C - i}{\sqrt{3} - i}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \, [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_C - i}{\sqrt{3} - i} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_C = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} - i\right) + i = \sqrt{3} + i$

4) Soit A et B les points d'affixes respectives -2 et $2i$.

$arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \Leftrightarrow M \in$ au demi cercle orienté $\overset{\frown}{AB}$ de diamètre $[AB]$

2 Exercice n°2

1) ⓐ <u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \in]0,1]$ vrai

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n \le 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} \le 1$.

$0 < u_n \le 1 \Leftrightarrow 1 < 1 + 2u_n \le 3 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{1 + 2u_n} \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{1+2u_n}} < 1$

$\begin{cases} 0 < \frac{1}{\sqrt{1+2u_n}} < 1 \\ 0 < u_n \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < \frac{u_n}{\sqrt{1+2u_n}} < 1$ donc $0 < u_{n+1} \le 1$.

<u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \le 1$.

ⓑ $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{1+2u_n}} - u_n = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+2u_n}} - 1\right) = u_n\left(\frac{1 - \sqrt{1+2u_n}}{\sqrt{1+2u_n}}\right)$

$= u_n \frac{1 - 1 - 2u_n}{\sqrt{1+2u_n}\left(1 + \sqrt{1+2u_n}\right)} = \frac{-2u_n{}^2}{\sqrt{1+2u_n}\left(1 + \sqrt{1+2u_n}\right)} < 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

ⓒ La suite (u_n) et décroissante et minorée (par 0) donc elle est convergente.

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1}=f(u_n)\ avec\ f:x\mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+2x}} \\ (u_n)\ converge\ vers\ un\ réel\ l\in[0,1]\ car\ \forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_n\le 1 \\ f\ est\ continue\ sur\ [0,1]\subset\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\ car\ f\ continue\Leftrightarrow 1+2x>0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{f(l)=l}$$

$$f(l)=l\Leftrightarrow l\sqrt{1+2l}=l\Leftrightarrow l\left(\sqrt{1+2l}-1\right)=0\Leftrightarrow l\frac{1+2l-1}{\sqrt{1+2l}+1}=0\Leftrightarrow l=0\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}u_n=0}$$

2) *Initialisation* : Pour $n=1,\ u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\le\frac{1}{\sqrt{1}}=1$ vrai.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $u_n\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ et montrons que $u_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{1+2u_n}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+2u_n}{u_n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u_n^2}+\frac{2}{u_n}}}\ or\ \ 0<u_n\le\frac{1}{\sqrt{n}}\Rightarrow\frac{1}{u_n}\ge\sqrt{n}\ et\ \frac{1}{u_n^2}\ge n$$

$$Donc\ \frac{1}{u_n^2}+\frac{2}{u_n}\ge n+2\sqrt{n}>n+1\ car\ pour\ n\ge 1\ on\ a\ (n+2\sqrt{n})-(n+1)=2\sqrt{n}-1>0$$

$$D'où\ \sqrt{\frac{1}{u_n^2}+\frac{2}{u_n}}\ge\sqrt{n+1}\ et\ par\ suite\ u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u_n^2}+\frac{2}{u_n}}}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

3) ⓐ $f:x\mapsto\dfrac{2}{1+\sqrt{1+2x}}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\ge 0,\ f'(x)=\dfrac{-2\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}}{(1+\sqrt{1+2x})^2}$

ou encore $f'(x)=\dfrac{-2}{(1+\sqrt{1+2x})^2\sqrt{1+2x}}<0$ donc f est décroissante sur $[0,+\infty[$.

ⓑ $$\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{\sqrt{1+2u_n}}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{1}{u_n}\left(\sqrt{1+2u_n}-1\right)=\frac{1}{u_n}\frac{\cancel{1}+2u_n\cancel{-1}}{\sqrt{1+2u_n}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+2u_n}+1}=f(u_n)$$

ⓒ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<u_n\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et f décroissante sur $[0,+\infty[$ donc $f(0)\ge f(u_n)\ge f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

ou encore $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\le\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\le 1.$

4) ⓐ Soit $n\in\mathbb{N},\ n\ge 4\Rightarrow\sqrt{n}\ge 2\Rightarrow 0<\dfrac{1}{\sqrt{n}}\le\dfrac{1}{2}$ donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\le f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ car f décroissante

D'où $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\le f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\le\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\le 1.$

ⓑ On sait que la suite (u_n) est convergente on pose $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l\in\mathbb{R}$.

Supposons que $l\ne 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{l}$ et par passage à la limite sur

l'encadrement de a) on obtient $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}\le 0\le 1$ ce qui est impossible donc $l=0$.

3 **Exercice n°3**

1) ⓐ $\forall x\in\mathbb{R},\ -1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow -2\le -2\cos x\le 2\Leftrightarrow 3x-2\le 3x-2\cos x\le 3x+2$

$Donc\ \ \forall x\in\mathbb{R},\ 3x-2\le g(x)\le 3x+2.$

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R},\ 3x-2\le g(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$$

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)\le 3x+2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3x+2)=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty.$$

ⓑ g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=3+2\sin x>0$ *car* $\sin x\ge -1$

Donc g *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. (*)

$$\begin{cases} g \text{ continue sur } \mathbb{R}\\ g\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right)\times\left(\frac{3\pi}{4}-\sqrt{2}\right)<0\end{cases}\qquad (**)$$

(*) *et* (**) $\Rightarrow$ *l'équation* $g(x)=0$ *admet, dans* $\mathbb{R}$, *une seule solution* α *avec* $\alpha\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$

ⓒ g *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *donc* $x\le\alpha\Rightarrow g(x)\le g(\alpha)=0$ *et* $x\ge\alpha\Rightarrow g(x)\ge g(\alpha)=0$

Alors $g(x)\le 0$ *si* $x\le\alpha$ *et* $g(x)\ge 0$ *si* $x\ge\alpha$.

2) ⓐ *Soit* $x\in\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$. *On sait dèja que* $3x-2\le g(x)\le 3x+2$

Alors $\dfrac{3x-2}{x-\alpha}\le f(x)\le\dfrac{3x+2}{x-\alpha}$ *si* $x>\alpha$ *et* $\dfrac{3x+2}{x-\alpha}\le f(x)\le\dfrac{3x-2}{x-\alpha}$ *si* $x<\alpha$

$$\forall x<\alpha,\ \frac{3x+2}{x-\alpha}\le f(x)\le\frac{3x-2}{x-\alpha}\ \text{et}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-\alpha}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{x-\alpha}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}=3\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=3$$

$$\forall x>\alpha,\ \frac{3x-2}{x-\alpha}\le f(x)\le\frac{3x+2}{x-\alpha}\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x-\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x-\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}=3\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$$

ⓑ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$, *on pose* $h=x-\alpha\Rightarrow x=h+\alpha$

$$f(x)=\frac{3x-2\cos x}{x-\alpha}=\frac{3(h+\alpha)-2\cos(h+\alpha)}{h}=\frac{3h+3\alpha-2\cos\alpha\cos h+2\sin h\sin\alpha}{h}$$

$$=\frac{3h+3\alpha-3\alpha\cos h+2\sin h\sin\alpha}{h}\quad car\ g(\alpha)=0\Leftrightarrow 3\alpha-2\cos\alpha=0\Leftrightarrow 2\cos\alpha=3\alpha$$

$$=3+3\alpha\frac{1-\cos h}{h}+2\sin\alpha\frac{\sin h}{h}.$$

ⓒ $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\lim\limits_{h\to0}\left(3+3\alpha\dfrac{1-\cos h}{h}+2\sin\alpha\dfrac{\sin h}{h}\right)=3+2\sin\alpha.$

f *admet une limite finie en* α *donc* f *est prolongeable par continuité.*

Son prolongement est la fonction $h:x\mapsto f(x)$ *si* $x\ne\alpha$ *et* $h(\alpha)=3+2\sin\alpha$.

4 Exercice n°4

Partie A

1) $z_0=iy\ (y\in\mathbb{R})$ *est une solution imaginaire de l'équation* $P(z)=0$

$\Leftrightarrow P(z_0)=0\Leftrightarrow (iy)^3-5i(iy)^2-(7+4i)(iy)-12+3i=0$

$\Leftrightarrow -iy^3+5iy^2-7iy+4y-12+3i=0\Leftrightarrow(4y-12)+i(-y^3+5y^2-7y+3)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y-12=0 \\ -y^3+5y^2-7y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ -27+45-21+3=-48+48=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=3$$

Donc l'équation $P(z)=0$ *admet une solution imaginaire* $z_0=3i$.

2) $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z-3i)(z^2+bz+c)=z^3+bz^2+cz-3iz^2-3ibz-3ic$

$$=z^3+(b-3i)z^2+(c-3ib)z-3ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-3i=-5i \\ c-3ib=-7-4i \\ -3ic=-12+3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2i \\ c=-1-4i \\ c-3ib=-1-4i-3i(-2i)=-7-4i \text{ vrai.} \end{cases}$$

Alors : $\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z-3i)(z^2-2iz-1-4i).}$

3) $P(z)=0 \Leftrightarrow z=3i$ *ou* $z^2-2iz-1-4i$

$\Delta=(-2i)^2+4(1+4i)=-4+4+16i=8(2i)=8(1+i)^2=\left[2\sqrt{2}(1+i)\right]^2$.

Donc les deux autres solutions sont :

$z_1=\dfrac{2i-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2})$ *et* $z_2=\dfrac{2i+2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+i(1+\sqrt{2})$.

Et finalement $S_{\mathbb{C}}=\left\{3i,\ -\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2}),\ \sqrt{2}+i(1+\sqrt{2})\right\}$.

Parie B

1)ⓐ *I est le milieu de* $[BC]$ *donc* $z_I=\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{\cancel{-\sqrt{2}}+i\cancel{-i\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{2}}+i+\cancel{i\sqrt{2}}}{2}=i$.

$$\frac{z_A-z_I}{z_C-z_I}=\frac{3i-i}{\sqrt{2}+i+i\sqrt{2}-i}=\frac{2i}{\sqrt{2}(1+i)}=\frac{(1+i)^2}{\sqrt{2}(1+i)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

$\dfrac{z_A-z_I}{z_C-z_I}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ *donc* $\left|\dfrac{z_A-z_I}{z_C-z_I}\right|=\dfrac{IA}{IC}=1\Rightarrow IA=IC$ *en plus* $\dfrac{z_A-z_I}{z_C-z_I}\notin\mathbb{R}$

donc le triangle AIC est isocèle en I.

$$(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}})\equiv arg\left(\frac{z_A-z_I}{z_C-z_I}\right)\equiv arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

ⓑ *A, I et C non alignés et* $I=B*C\Rightarrow$ *A, B et C non alignés* $\Rightarrow$ *ABC est un triangle.*

$$AB^2=|z_B-z_A|^2=\left|-\sqrt{2}+i-i\sqrt{2}-3i\right|^2=\left|-\sqrt{2}-i(2+\sqrt{2})\right|^2=2+(2+\sqrt{2})^2=8+4\sqrt{2}.$$

$$AC^2=|z_C-z_A|^2=\left|\sqrt{2}+i+i\sqrt{2}-3i\right|^2=\left|\sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2)\right|^2=\sqrt{2}^2+(\sqrt{2}-2)^2=8-4\sqrt{2}.$$

$$BC^2=\left|\sqrt{2}+i+i\sqrt{2}+\sqrt{2}-i+i\sqrt{2}\right|^2=\left|2\sqrt{2}(1+i)\right|^2=\left(2\sqrt{2}.\sqrt{2}\right)^2=16$$

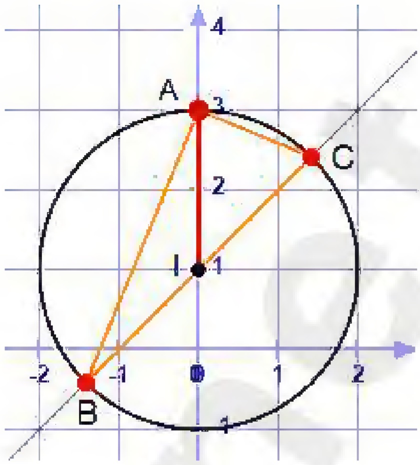
Donc $BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow$ *le triangle ABC est rectangle en A.*

ⓒ *Le triangle ABC est rectangle en A donc son cercle circonscrit* $\mathscr{C}$ *est le cercle de diamètre* $[BC]$ *donc de centre* $I=B*C$ *et de rayon IA.*

On a aussi $(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}})\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ *donc il suffit de construire la demi droite* $[It)$

telle que

$(\widehat{\overrightarrow{It},\overrightarrow{IA}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (*d'équation* $y = x$ *et* $x \geq 0$), *elle coupe le cercle* $\mathscr{C}$ *en* C *et finalement on place le point* B *symétrique de* C *par rapport à* I.



2)ⓐ $\widehat{CBA}$ *est un angle inscrit sur le cercle* $\mathscr{C}$, *associé à l'angle au centre* $\widehat{CIA}$

Donc $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [\pi]$ $\left(c-à-d\ \frac{\pi}{8}\ ou\ -\frac{7\pi}{8}\ [2\pi]\right)$

Or $B \in$ *à l'arc orienté* $\widehat{AC}$ *du cercle* $\mathscr{C}$ *donc la mesure principale de* $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ *appartient à* $]0,\pi[$ *d'où* $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$.

ⓑ $\frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{2}}}{4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. *On a* $\frac{BA}{BC} = \frac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_B|} = \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = |w|$.

et on a aussi $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi] \Leftrightarrow arg(w) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$.

D'où $w = \left[\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\pi}{8}\right] = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$.

ⓒ $$w = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{3i + \sqrt{2} - i + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i + i\sqrt{2} + \sqrt{2} - i + i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + i(2+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(1+i)} = \frac{\left[\sqrt{2} + i(2+\sqrt{2})\right](1-i)}{4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} + i\frac{-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ainsi on a : $w = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

Donc $$\begin{cases} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

SIGMATHS