Épreuve :

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°1

◉○◉○◉

4ème Maths – G1

Professeur :

Dhaouadi

Nejib

Exercice 1

Soit φ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\varphi(x) = x^3 - 3x + 1$.

1) a) *Etudier les variations de* φ.

b) *Montrer que l'équation* $\varphi(x) = 0$ *admet exactement trois solutions* α, β *et* γ *telles que :* $-2 < \alpha < -1$ et $0 < \beta < 1 < \gamma < 2$.

2) *On se propose, dans cette question, de chercher les solutions de l'équation* $\varphi(x) = 0$ *sous la forme* $x = 2\cos\theta$ *où* $\theta \in [0, 2\pi[$.

a) *Sachant que* $4\cos^3\theta = \cos 3\theta + 3\cos\theta$, *Montrer que* x *est solution de l'équation* $\varphi(x) = 0$ *si, et seulement si,* $\cos(3\theta) = \dfrac{-1}{2}$.

b) *Résoudre, dans* $[0, 2\pi[$, *l'équation* $\cos(3\theta) = \dfrac{-1}{2}$.

c) *En déduire les valeurs exactes de* α, β *et* γ

3) *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{\alpha, 0\}$ *par :* $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - \alpha x}$.

On note $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans un repère cartésien* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) *Vérifier que pour tout réel* x, $\varphi(x) = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 3)$.

b) *En déduire que* f *est prolongeable par continuité en* α.
Définir son prolongement g.

c) *Montrer que la courbe* $\mathscr{C}$ *admet une asymptote oblique que l'on déterminera.*
Préciser l'autre asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

4) *Déterminer les limites éventuelles suivantes :*

$$\lim_{x \to 0} f\left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} x f\left(\frac{2}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} x f(x)\left(1 - \cos\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right).$$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient A, B *et* C *les points d'affixes respectives* i, $1 + 2i$ *et* $-1 + 2i$.

On appelle f *l'application du plan complexe qui à tout point* M *d'affixe* z *associe le point* M' *d'affixe* z' *telle que* $z' = \dfrac{3iz + 5}{z - i}$.

1) *Déterminer l'ensemble des points invarients par* f.

2) a) *Soit* $\mathscr{C}_1$ *le cercle de diamètre* $[BC]$. *Montrer l'équivalence suivant :*

$M \in \mathscr{C}_1 \setminus \{A\} \Leftrightarrow$ *il existe* $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ *tel que* $z = 2i + e^{i\theta}$.

b) *vérifier que pour tout nombre complexe* $z \neq i$, $z' = 3i + \dfrac{2}{z-i}$.

c) *Soit* M *un point d'affixe* $2i + e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

Déterminer l'affixe z' *de* $f(M)$ *et montrer que* $z' = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + 2i$.

d) *En déduire que l'image de* $\mathscr{C}_1 \setminus \{A\}$, *par* f, *est incluse dans une droite que l'on précisera.*

e) *Montrer que si* $M \in \mathscr{C}_1 \setminus \{A\}$ *alors les points* A, M *et* $f(M)$ *son alignés.*

3) *Soit* $\mathscr{C}_2$ *le cercle de centre* A *et de rayon* 1. *Soit* M *un point de* $\mathscr{C}_2$.

a) *Justifier que l'affixe* z *du point* M *vérifie* $z = i + e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in [0, 2\pi[$.

b) *Exprimer l'affixe* z' *de* $f(M)$ *en fonction de* θ *et en déduire que* $f(M)$ *appartient à un ensemble fixe que l'on précisera.*

Exercice 3

Pour tout nombre complexe z, *on pose :*

$$P(z) = z^3 - (4+11i)z^2 + (-33+32i)z + 60 + 27i$$

1) a) *Calculer* $P(3i)$

b) *Résoudre l'équation* $P(z) = 0$.

2) *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé.*

Soient les points A, B *et* C *d'affixes respectives* $z_A = 3+2i$, $z_B = 3i$ *et* $z_C = 1+6i$.

Montrer que ABC *est un triangle rectangle et isocèle.*

SIGMATHS

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

1) a) *φ est une fonction polynome donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :*

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\mathbf{3}$	$\searrow$	$\mathbf{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

b) *φ est continue sur $\mathbb{R}$ et en plus on a :*

$\varphi(-2)\times\varphi(-1) = -3 < 0,\ \ \varphi(0)\times\varphi(1) = -1 < 0$ *et* $\varphi(1)\times\varphi(2) = -3 < 0$ *donc*

l'équation $\varphi(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]-2,-1\right[$, au moins une solution $\beta \in \left]0,1\right[$ et au moins une solution $\gamma \in \left]1,2\right[$.

Or on a aussi :

φ est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty,-1\right[$ et $\left]2,+\infty\right[$

$\Rightarrow \alpha$ (resp. γ) est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ dans $\left]-\infty,-1\right[$ (resp. $\left]2,+\infty\right[$)

φ est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-1,1\right[$ donc β est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ dans $\left]-1,1\right[$.

Et puisque $\varphi(-2) \neq 0,\ \varphi(-1) \neq 0,\ \varphi(1) \neq 0$ et $\varphi(2) \neq 0$ on peut alors conclure que l'équation $\varphi(x) = 0$, admet exactement trois solutions α, β et γ telles que

$-2 < \alpha < -1$ et $0 < \beta < 1 < \gamma < 2$.

2) a) *$x = 2\cos\theta$ est solution de l'équation* $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow (2\cos\theta)^3 - 3(2\cos\theta) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 8\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta\right) - 6\cos\varphi + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3\theta + 6\cos\theta - 6\cos\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3\theta = -\frac{1}{2}.$

b) $$\cos 3\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 3\theta = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ \theta = \frac{-2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

- $0 \le \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{9} + \frac{k}{3} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{9} \le \frac{k}{3} < 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \le k < \frac{8}{3}$ *et* $k \in \mathbb{Z}$

  Donc $k \in \{0,1,2\}$ *et* $\theta \in \left\{\frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right\}$

- $0 \le -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow 0 \le -\frac{1}{9} + \frac{k}{3} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} \le \frac{k}{3} < 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le k < \frac{10}{3}$ *et* $k \in \mathbb{Z}$

  Donc $k \in \{1,2,3\}$ *et* $\theta \in \left\{\frac{4\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}\right\}$

c) *Les solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont :*

$x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{-16\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{16\pi}{9}\right)$, $x = 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{-10\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{10\pi}{9}\right)$

et $x = 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{-4\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$.

On a : $\frac{8\pi}{9} \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\Rightarrow \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) < 0$ *donc* $\boxed{\alpha = 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)}$

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$\frac{2\pi}{9} < \frac{4\pi}{9} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) > \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ *donc* $\boxed{\beta = 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)}$ *et* $\boxed{\gamma = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}$.

3) a) $(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-3) = x^3 + \cancel{\alpha x^2} + \cancel{x\alpha^2} - 3x - \cancel{\alpha x^2} - \cancel{\alpha^2 x} - \alpha^3 + 3\alpha = x^3 - 3x - \alpha^3 + 3\alpha$

Or $\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow -\alpha^3 + 3\alpha = 1$ *donc* $(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-3) = \varphi(x)$.

b) $$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha}\frac{\varphi(x)}{x^2-\alpha x} = \lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-3)}{x(x-\alpha)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{x^2+\alpha x+\alpha^2-3}{x}$$

$$= \lim_{x\to\alpha} x + \alpha + \frac{\alpha^2-3}{x} = 2\alpha + \frac{\alpha^2-3}{\alpha} = 3\alpha - \frac{3}{\alpha}.$$

f admet une limite finie en α donc f est prolongeable par continuité en α.

Son prolongement g est définie sur $\mathbb{R}^*$ *par* $g(x) = x + \alpha + \dfrac{\alpha^2-3}{x}$.

c) $$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+\alpha)\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[g(x)-(x+\alpha)\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\frac{\alpha^2-3}{x} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = x+\alpha$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} x + \alpha + \frac{\alpha^2-3}{x} = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha^2-3>0 \\ -\infty & si\ \alpha^2-3<0 \end{cases}$

Donc la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est une asymptote à $\mathscr{C}$.

4) ✦*Posons* $u(x) = \dfrac{\sin\alpha x}{x}$. *On a* $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to0} u(x) = \lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\times\alpha = \alpha\times\lim_{X\to0}\frac{\sin X}{X} = \alpha\times1 = \alpha \\ \displaystyle\lim_{x\to\alpha} f(x) = 3\alpha - \frac{3}{\alpha} \end{cases}$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to0} f\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right) = \lim_{x\to0} fou = 3\alpha - \frac{3}{\alpha}}$ (*d'après le théorème de la limite de la composée*).

✦ *Pour* $x \neq 0$, $xf\left(\dfrac{2}{x}\right) = 2\times\dfrac{f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$. *Posons* $u(x) = \dfrac{2}{x}$ *et* $v(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to0^+} u(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{2}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} v(x) = 1 \text{ car la droite d'éq. } y = x+\alpha \text{ est une asymptote au voisinage de } +\infty \end{cases}$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}xf\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to0^+} vou(x) = 1$ *d'où* $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to0^+} xf\left(\frac{2}{x}\right) = 2}$.

✦ $xf(x)\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right) = \dfrac{x}{f(x)}\,\dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2}$. *Posons* $u(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ *et* $v(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $xf(x)\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right) = \dfrac{x}{f(x)}\times(vou)(x)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0 \ car \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty. \\ \lim\limits_{x\to 0} v(x) = \dfrac{1}{2} \ (Résultat \ de \ cours)\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(vou)(x) = \frac{1}{2} \ donc$$

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)\left(1-\cos\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} \times (vou)(x) = 1\times\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Exercice 2

1) $f(M) = M \Leftrightarrow z = \dfrac{3iz+5}{z-i} \Leftrightarrow z^2 - iz = 3iz+5 \Leftrightarrow z^2 - 4iz - 5 = 0.\ \Delta = (-4i)^2 + 20 = -16+2 = 4 = 2^2$

Donc les solutions sont : $z' = \dfrac{4i-2}{2} = -1+2i = z_C$ *et* $z'' = \dfrac{4i+2}{2} = 1+2i = z_B$.

L'ensemble des points invariants est $\{B,C\}$.

2) a) $\mathscr{C}_1$ *est le cercle de centre le point* I *milieu de* $[AB]$ *d'affixe* $\dfrac{z_A+z_B}{2} = 2i$

et de rayon $IA = |z_A - z_I| = |i-2i| = |-i| = 1$.

$M \in \mathscr{C}_1 \setminus \{A\} \Leftrightarrow IM = 1$ *et* $(\vec{i},\overrightarrow{IM}) \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow |z-2i| = 1$ *et* $arg(z-2i) \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ *Il existe un réel* $\theta \in \left[0,\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3},2\pi\right[$ *tel que* $z - 2i = e^{i\theta}$.

$\Leftrightarrow z = 2i + e^{i\theta}$ *où* $\theta \in \left[0,\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3},2\pi\right[$.

b) $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{i\},\ z' = \dfrac{3iz+5}{z-i} = \dfrac{3iz+3-3+5}{z-i} = \dfrac{3i(z-i)-3+5}{z-i} = 3i + \dfrac{2}{z-i}$.

c) $z' = 3i + \dfrac{2}{z-i} = 3i + \dfrac{2}{2i+e^{i\theta}-i} = 3i + \dfrac{2}{e^{i\theta}+i} = 3i + \dfrac{2}{\cos\theta + i(\sin\theta+1)}$

$$= 3i + \frac{2[\cos\theta - i(\sin\theta+1)]}{\cos^2\theta + (1+\sin\theta)^2} = 3i + \frac{2[\cos\theta - i(\sin\theta+1)]}{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta + 1}$$

$$= 3i + \frac{\cancel{2}[\cos\theta - i(\sin\theta+1)]}{\cancel{2}(\sin\theta+1)} = 3i + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} - i\,\cancel{\frac{\sin\theta+1}{1+\sin\theta}} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + 2i.$$

d) *d'après c) si* $M \in \mathscr{C}_1\setminus\{A\}$ *alors* $f(M)$ *est le point d'affixe* $z' = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + 2i$.

Donc $\mathrm{Im}(z') = 2$ *ou encore* $f(M)$ *est un point de la droite fixe* Δ *d'équation* $y = 2$.

D'où $f(\mathscr{C}_1\setminus\{A\})$ *est incluse dans la droite* Δ.

e) $M \in \mathscr{C}_1\setminus\{A\}$ *alors* $z = 2i + e^{i\theta}$ *où* $\theta \in \left[0,\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3},2\pi\right[$ *et* $z' = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + 2i$.

$Aff(\overrightarrow{AM}) = z - i = 2i + e^{i\theta} - i = i + e^{i\theta}$ *et* $Aff(\overrightarrow{AM'}) = z' - i = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + i$.

$$\frac{Aff(\overrightarrow{AM'})}{Aff(\overrightarrow{AM})} = \frac{\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + i}{i + e^{i\theta}} = \frac{\dfrac{\cos\theta + i(1+\sin\theta)}{1+\sin\theta}}{\cos\theta + i(1+\sin\theta)} = \frac{1}{1+\sin\theta} \in \mathbb{R}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AM'}$ *sont colinéaires d'où* A, M *et* M' *sont alignés.*

3) a) $M(z) \in \mathscr{C}_2 \Leftrightarrow AM = 1 \Leftrightarrow |z-i| = 1 \Leftrightarrow z - i = e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in [0,2\pi[$

$\Leftrightarrow z = i + e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in [0,2\pi[$.

b) Si $M(z) \in \mathscr{C}_2$ et $M' = f(M)$ alors M' d'affixe z' tel que $z' = 3i + \dfrac{2}{z-i} = 3i + \dfrac{2}{i + e^{i\theta} - i}$

$\Rightarrow z' = 3i + 2e^{-i\theta}$. Donc $z' - 3i = 2e^{-i\theta} \Rightarrow |z' - 3i| = 2 \Rightarrow JM' = 2$ où J d'affixe $3i$

Donc M' est un point du cercle de centre J et de rayon 2.

Exercice 3

1) a) $P(3i) = (3i)^3 - (3i)^2(4+11i) + (3i)(-33+32i) + 60 + 27i$

$= -27i + 9(4+11i) + (3i)(-33+32i) + 60 + 27i$

$= \cancel{-27i} + 36 + \cancel{99i} \cancel{-99i} - 96 + 60 + \cancel{27i} = 96 - 96 = 0$

b) $P(3i) = 0$ donc $P(z)$ s'écrit sous la forme $(z-3i)(az^2 + bz + c)$ où a, b et $c \in \mathbb{C}$.

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-3i)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - 3iaz^2 - 3ibz - 3ic$

$= az^3 + (b-3ia)z^2 + (c-3ib)z - 3ic$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 3ia = -4 - 11i \\ c - 3ib = -33 + 32i \\ -3ic = 60 + 27i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 - 11i + 3i = -4 - 8i \\ c = \dfrac{60+27i}{-3i} = -9 + 20i \\ c - 3ib = -9 + 20i - 3i(-4-8i) = -9 + 20i + 12i - 24 = -33 + 32i \text{ vrai} \end{cases}$$

Alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-3i)\left(z^2 - 4(1+2i)z - 9 + 20i\right)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-3i)\left(z^2 - 4(1+2i)z - 9 + 20i\right) = 0 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z^2 - 4(1+2i)z - 9 + 20i = 0$

Résolvons l'équation : $z^2 - 4(1+2i)z - 9 + 20i = 0$ (*)

$\Delta = 16(1+2i)^2 - 4(-9+20i) = 16(-3+4i) + 36 - 80i = -12 - 16i = \delta^2$ tel que

$\delta = x + iy$ où x, y deux réels vérifiant

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -12 \\ xy < 0 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 16 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$ prenons alors $\delta = 2 - 4i$.

Donc les solutions de l'équations (*) sont :

$z' = \dfrac{4 + 8i - 2 + 4i}{2} = 1 + 6i$ et $z'' = \dfrac{4 + 8i + 2 - 4i}{2} = 3 + 2i$

$\boxed{\text{Conclusion : les solutions de l'équation } P(z) = 0 \text{ sont : } 3i,\ 1+6i \text{ et } 3+2i}$

2) $AB = |z_B - z_A| = |3i - 3 - 2i| = |-3 + i| = \sqrt{10}$, $AC = |z_c - z_A| = |1 + 6i - 3 - 2i| = |-2 + 4i| = \sqrt{20}$

et $BC = |z_C - z_B| = |1 + 6i - 3i| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$.

$AB = BC \Rightarrow$ Le triangle ABC est isocèle en B

$AB^2 + BC^2 = 10 + 10 = 20 = AC^2 \Rightarrow$ Le triangle ABC est rectangle en B.

SIGMATHS