Épreuve : Mathématiques **Durée :** 3H

Devoir de synthèse n°1

4ème Maths

Professeur : Dhaouadi Nejib

1 Exercice n°1 — 4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Pour chacune des questions suivantes, Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondante à la seule réponse correcte.

1) *Soit z un nombre complexe tel que $\bar{z}+|z|=6+2i$. L'écriture algébrique de z est :*

a) $\frac{8}{3}-2i$ b) $-\frac{8}{3}-2i$ c) $\frac{8}{3}+2i$ d) $-\frac{8}{3}+2i$

2) *Soit $n\in\mathbb{N}$. Le nombre $(1+i\sqrt{3})^n$ est réel si, et seulement si, n s'écrit sous la forme :*

a) $3k+1$ b) $3k+2$ c) $3k$ d) $6k$

3) *On appelle A et B les points d'affixes respectives i et $\sqrt{3}$. L'affixe z_C du point C tel que ABC est un triangle équilateral direct est :*

a) $-i$ b) $2i$ c) $\sqrt{3}+i$ d) $\sqrt{3}+2i$

4) *L'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$, où x et y des réels, telles que $\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ est inclus dans :*

a) La droite d'équation $y=-x$.
b) La droite d'équation $y=x$
c) Le cercle de centre I d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$
d) Le cercle de diamètre $[AB]$ où A et B sont les points d'affixes respectives -2 et 2i

2 Exercice n°2 — 5,5 points

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{1+2u_n}}$.

1) ⓐ *Montrer que pour tout entier naturel n, $0<u_n\le 1$.*

ⓑ *Montrer que la suite (u_n) est décroissante.*

ⓒ *En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.*

2) *À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n\le\frac{1}{\sqrt{n}}$.*

3) *Soit f la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{2}{1+\sqrt{1+2x}}$.

ⓐ *Montrer que f est décroissante sur* $[0,+\infty[$.

ⓑ *Vérifier que :* $\forall n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}=f(u_n)$.

ⓒ *Montrer alors que pour tout entier non nul n on a :* $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\leq\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\leq 1$.

4)ⓐ *Montrer que pour tout entier* $n\geq 4,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leq\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}\leq 1$.

ⓑ *Retrouver alors la limite de la suite* (u_n).

3 Exercice n°3 4,5 points

1) *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :* $g(x)=3x-2\cos x$.

ⓐ *Montrer que pour tout réel x,* $\quad 3x-2\leq g(x)\leq 3x+2$.

En déduire les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

ⓑ *Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une seule solution α et que* $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.

ⓒ *Donner le signe de g sur $\mathbb{R}$.*

2) *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$ par :* $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-\alpha}$

ⓐ *A l'aide de deux encadrements, pour $x<\alpha$ et $x>\alpha$, déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.*

ⓑ *Pour tout réel x, on pose $h=x-\alpha$.*

Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\alpha\},\ f(x)=3+3\alpha\dfrac{1-\cos h}{h}+2\sin\alpha.\dfrac{\sin h}{h}$.

ⓒ *En déduire que f est prolongeable par continuité en α et définir son prolongement*

4 Exercice n°4 6 points

Partie A

On pose $P(z)=z^3-5iz^2-(7+4i)z-12+3i$

1) *Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet, dans $\mathbb{C}$, une solution imaginaire z_0 que l'on précisera.*

2) *Déterminer les nombres complexes b et c tels que :* $\forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z-3i)(z^2+bz+c)$.

3) *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation* $P(z)=0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points A d'affixe $z_A = 3i$, *B d'affixe* $z_B = -\sqrt{2} + i\left(1-\sqrt{2}\right)$, *C d'affixe* $z_C = \sqrt{2} + i\left(1+\sqrt{2}\right)$ *et I le milieu du segment* $[BC]$ (*on note* z_I *son affixe*).

1) ⓐ *Calculer* z_I *et donner la forme algébrique du nombre complexe* $\dfrac{z_A - z_I}{z_C - z_I}$ *en déduire que le triangle AIC est isocèle et donner une mesure de l'angle* $\overline{(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA})}$.

ⓑ *Montrer que ABC est un triangle rectangle en A.*

ⓒ *Dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$, *placer le point A, tracer le cercle circonscrit au triangle ABC et puis placer les points B et C.*

2) *On pose* $w = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

ⓐ *Déterminer une mesure de l'angle* $\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}$.

ⓑ *Calculer* $\dfrac{BA}{BC}$ *et déduire la forme trigonométrique de w.*

ⓒ *Donner la forme algébrique de w et déduire* $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

L'énoncé du devoir en 3 pages et la correction en 5 pages.

CORRECTION DU DEVOIR

1 Exercice n°1

1) $a)$	2) $c)$	3) $c)$	4) $d)$

1) *On pose* $z = x + iy$ *où* x *et* y *des réels*

$\bar{z} + |z| = 6 + 2i \Leftrightarrow x - iy + \sqrt{x^2 + y^2} = 6 + 2i \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + y^2} - iy = 6 + 2i \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + y^2} = 6$

et $y = -2 \Leftrightarrow y = -2$ *et* $x + \sqrt{x^2 + 4} = 6 \Leftrightarrow y = -2$ *et* $(x-6)^2 = x^2 + 4 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$ *et* $y = -2.$

Donc $z = \frac{8}{3} - 2i.$

2) $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (1 + i\sqrt{3})^n = 2e^{i\frac{n\pi}{3}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 3k, k \in \mathbb{Z}$

3) *Le triangle* ABC *est équilateral direct* $\Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C - i}{\sqrt{3} - i}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{z_C - i}{\sqrt{3} - i}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_C - i}{\sqrt{3} - i} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_C = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} - i\right) + i = \sqrt{3} + 2i$$

4) *Soit* A *et* B *les points d'affixes respectives* -2 *et* $2i.$

$arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow M \in$ *au demi cercle orienté* $\overset{\frown}{AB}$ *de diamètre* $[AB]$ *privé de* A *et* B

2 Exercice n°2

1) ⓐ <u>*Initialisation*</u> : *Pour* $n = 0$, $u_0 = 1 \in]0,1]$ *vrai*

<u>*Hérédité*</u> : *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *supposons que* $0 < u_n \le 1$ *et montrons que* $0 < u_{n+1} \le 1.$

$0 < u_n \le 1 \Leftrightarrow 1 < 1 + 2u_n \le 3 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{1 + 2u_n} \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{1+2u_n}} < 1$

$\begin{cases} 0 < \frac{1}{\sqrt{1+2u_n}} < 1 \\ 0 < u_n \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < \frac{u_n}{\sqrt{1+2u_n}} < 1$ *donc* $0 < u_{n+1} \le 1.$

<u>*Conclusion*</u> : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \le 1.$

ⓑ $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{1 + 2u_n}} - u_n = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2u_n}} - 1\right) = u_n\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 2u_n}}{\sqrt{1 + 2u_n}}\right)$

$= u_n \frac{1 - 1 - 2u_n}{\sqrt{1 + 2u_n}\left(1 + \sqrt{1 + 2u_n}\right)} = \frac{-2u_n^{\ 2}}{\sqrt{1 + 2u_n}\left(1 + \sqrt{1 + 2u_n}\right)} < 0$

Donc la suite (u_n) *est décroissante.*

ⓒ *La suite* (u_n) *et décroissante et minorée (par* 0*) donc elle est convergente.*

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+2x}} \\ (u_n) \text{ converge vers un réel } l \in [0,1] \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \le 1 \\ f \text{ est continue sur } [0,1] \subset \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\text{ car } f \text{ continue } \Leftrightarrow 1+2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(l) = l}$$

$$f(l) = l \Leftrightarrow l\sqrt{1+2l} = l \Leftrightarrow l\left(\sqrt{1+2l} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow l\,\frac{1+2l-1}{\sqrt{1+2l}+1} = 0 \Leftrightarrow l = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty} u_n = 0}$$

2) *Initialisation* : Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ et montrons que $u_{n+1} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+2u_n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2u_n}{u_n{}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u_n{}^2} + \frac{2}{u_n}}} \text{ or } 0 < u_n \le \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{u_n} \ge \sqrt{n} \text{ et } \frac{1}{u_n{}^2} \ge n$$

$$\text{Donc } \frac{1}{u_n{}^2} + \frac{2}{u_n} \ge n + 2\sqrt{n} > n+1 \text{ car pour } n \ge 1 \text{ on a } (n+2\sqrt{n}) - (n+1) = 2\sqrt{n} - 1 > 0$$

$$\text{D'où } \sqrt{\frac{1}{u_n{}^2} + \frac{2}{u_n}} \ge \sqrt{n+1} \text{ et par suite } u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u_n{}^2} + \frac{2}{u_n}}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

3) ⓐ $f : x \mapsto \dfrac{2}{1+\sqrt{1+2x}}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \ge 0$, $f'(x) = \dfrac{-2\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}}{(1+\sqrt{1+2x})^2}$

ou encore $f'(x) = \dfrac{-2}{(1+\sqrt{1+2x})^2\sqrt{1+2x}} < 0$ donc f est décroissante sur $[0,+\infty[$.

ⓑ $$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{\sqrt{1+2u_n}}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n}\left(\sqrt{1+2u_n} - 1\right) = \frac{1}{u_n}\,\frac{\cancel{1} + 2u_n \cancel{-1}}{\sqrt{1+2u_n}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+2u_n}+1} = f(u_n)$$

ⓒ $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et f décroissante sur $[0,+\infty[$ donc $f(0) \ge f(u_n) \ge f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

ou encore $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \le \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \le 1.$

4) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}, n \ge 4 \Rightarrow \sqrt{n} \ge 2 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \le \dfrac{1}{2}$ donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \le f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ car f décroissante

D'où $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \le f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \le \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \le 1.$

ⓑ On sait que la suite (u_n) est convergente on pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$.

Supposons que $l \ne 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{l}$ et par passage à la limite sur

l'encadrement de a) on obtient $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}} \le 0 \le 1$ ce qui est impossible donc $l = 0$.

3 **Exercice n°3**

1) ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le -2\cos x \le 2 \Leftrightarrow 3x - 2 \le 3x - 2\cos x \le 3x + 2$

$Donc\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ 3x-2 \le g(x) \le 3x+2.$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \ 3x-2 \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) \le 3x+2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3x+2) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

ⓑ g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 3+2\sin x > 0$ *car* $\sin x \ge -1$

Donc g *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. (*)

$$\begin{cases} g \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ g\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right)\times\left(\frac{3\pi}{4}-\sqrt{2}\right) < 0 \end{cases} \quad (**)$$

(*) *et* (**) $\Rightarrow$ *l'équation* $g(x)=0$ *admet, dans* $\mathbb{R}$, *une seule solution* α *avec* $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$

ⓒ g *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *donc* $x \le \alpha \Rightarrow g(x) \le g(\alpha) = 0$ *et* $x \ge \alpha \Rightarrow g(x) \ge g(\alpha) = 0$

Alors $g(x) \le 0$ *si* $x \le \alpha$ *et* $g(x) \ge 0$ *si* $x \ge \alpha$.

2) ⓐ *Soit* $x \in \mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$. *On sait dèja que* $3x-2 \le g(x) \le 3x+2$

Alors $\dfrac{3x-2}{x-\alpha} \le f(x) \le \dfrac{3x+2}{x-\alpha}$ *si* $x > \alpha$ *et* $\dfrac{3x+2}{x-\alpha} \le f(x) \le \dfrac{3x-2}{x-\alpha}$ *si* $x < \alpha$

$$\forall x < \alpha, \frac{3x+2}{x-\alpha} \le f(x) \le \frac{3x-2}{x-\alpha} \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-\alpha} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{x-\alpha} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = 3 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

$$\forall x > \alpha, \frac{3x-2}{x-\alpha} \le f(x) \le \frac{3x+2}{x-\alpha} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x-\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x-\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = 3 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$, *on pose* $h = x-\alpha \Rightarrow x = h+\alpha$

$$f(x) = \frac{3x-2\cos x}{x-\alpha} = \frac{3(h+\alpha)-2\cos(h+\alpha)}{h} = \frac{3h+3\alpha-2\cos\alpha\cos h+2\sin h\sin\alpha}{h}$$

$$= \frac{3h+3\alpha-3\alpha\cos h+2\sin h\sin\alpha}{h} \quad car\ \ g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 3\alpha-2\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\cos\alpha = 3\alpha$$

$$= 3+3\alpha\frac{1-\cos h}{h}+2\sin\alpha\frac{\sin h}{h}.$$

ⓒ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{h\to0}\left(3+3\alpha\dfrac{1-\cos h}{h}+2\sin\alpha\dfrac{\sin h}{h}\right) = 3+2\sin\alpha.$

f *admet une limite finie en* α *donc* f *est prolongeable par continuité.*

Son prolongement est la fonction $h : x \mapsto f(x)$ *si* $x \ne \alpha$ *et* $h(\alpha) = 3+2\sin\alpha$.

4 **Exercice n°4**

Partie A

1) $z_0 = iy\ (y \in \mathbb{R})$ *est une solution imaginaire de l'équation* $P(z)=0$

$\Leftrightarrow P(z_0) = 0 \Leftrightarrow (iy)^3 - 5i(iy)^2 - (7+4i)(iy) - 12 + 3i = 0$

$\Leftrightarrow -iy^3 + 5iy^2 - 7iy + 4y - 12 + 3i = 0 \Leftrightarrow (4y-12) + i(-y^3+5y^2-7y+3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y-12=0 \\ -y^3+5y^2-7y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ -27+45-21+3=-48+48=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=3$$

Donc l'équation $P(z)=0$ *admet une solution imaginaire* $z_0=3i$.

2) $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z)=(z-3i)(z^2+bz+c)=z^3+bz^2+cz-3iz^2-3ibz-3ic$

$$= z^3+(b-3i)z^2+(c-3ib)z-3ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-3i=-5i \\ c-3ib=-7-4i \\ -3ic=-12+3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2i \\ c=-1-4i \\ c-3ib=-1-4i-3i(-2i)=-7-4i \ vrai. \end{cases}$$

Alors : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ P(z)=(z-3i)(z^2-2iz-1-4i).}$

3) $P(z)=0 \Leftrightarrow z=3i \quad ou \quad z^2-2iz-1-4i$

$\Delta=(-2i)^2+4(1+4i)=-4+4+16i=8(2i)=8(1+i)^2=\left[2\sqrt{2}(1+i)\right]^2$.

Donc les deux autres solutions sont :

$$z_1=\frac{2i-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2}) \quad et \quad z_2=\frac{2i+2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+i(1+\sqrt{2}).$$

Et finalement $S_{\mathbb{C}}=\left\{3i,\ -\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2}),\ \sqrt{2}+i(1+\sqrt{2})\right\}$.

Parie B

1)ⓐ *I est le milieu de* $[BC]$ *donc* $z_I=\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{\cancel{-\sqrt{2}}+i\cancel{-i\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{2}}+i+\cancel{i\sqrt{2}}}{2}=i.$

$$\frac{z_A-z_I}{z_C-z_I}=\frac{3i-i}{\sqrt{2}+i+i\sqrt{2}-i}=\frac{2i}{\sqrt{2}(1+i)}=\frac{(1+i)^2}{\sqrt{2}(1+i)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

$\dfrac{z_A-z_I}{z_C-z_I}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ *donc* $\left|\dfrac{z_A-z_I}{z_C-z_I}\right|=\dfrac{IA}{IC}=1 \Rightarrow IA=IC$ *en plus* $\dfrac{z_A-z_I}{z_C-z_I}\notin \mathbb{R}$

donc le triangle AIC est isocèle en I.

$$(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}) \equiv arg\left(\frac{z_A-z_I}{z_C-z_I}\right) \equiv arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

ⓑ *A, I et C non alignés et* $I=B*C \Rightarrow$ *A, B et C non alignés* $\Rightarrow$ *ABC est un triangle.*

$$AB^2=|z_B-z_A|^2=\left|-\sqrt{2}+i-i\sqrt{2}-3i\right|^2=\left|-\sqrt{2}-i(2+\sqrt{2})\right|^2=2+(2+\sqrt{2})^2=8+4\sqrt{2}.$$

$$AC^2=|z_C-z_A|^2=\left|\sqrt{2}+i+i\sqrt{2}-3i\right|^2=\left|\sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2)\right|^2=\sqrt{2}^2+(\sqrt{2}-2)^2=8-4\sqrt{2}.$$

$$BC^2=\left|\sqrt{2}+i+i\sqrt{2}+\sqrt{2}-i+i\sqrt{2}\right|^2=\left|2\sqrt{2}(1+i)\right|^2=\left(2\sqrt{2}.\sqrt{2}\right)^2=16$$

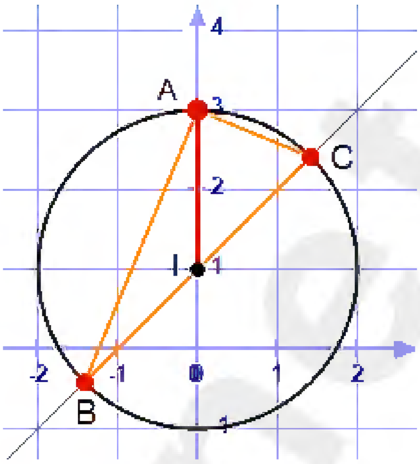
Donc $BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow$ *le triangle ABC est rectangle en A.*

ⓒ *Le triangle ABC est rectangle en A donc son cercle circonscrit* $\mathscr{C}$ *est le cercle de diamètre* $[BC]$ *donc de centre* $I=B*C$ *et de rayon IA.*

On a aussi $(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ *donc il suffit de construire la demi droite* $[It)$

telle que

$(\overrightarrow{It},\overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (*d'équation* $y = x$ *et* $x \geq 0$),
elle coupe le cercle $\mathscr{C}$ *en C et finalement on place le point B symétrique de C par rapport à I.*



2)ⓐ *CBA est un angle inscrit sur le cercle* $\mathscr{C}$, *associé à l'angle au centre CIA*

Donc $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [\pi]$ $\left(c-à-d\ \frac{\pi}{8}\ ou\ -\frac{7\pi}{8}\ [2\pi]\right)$

Or $B \in$ *à l'arc orienté AC du cercle* $\mathscr{C}$ *donc la mesure principale de* $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$

appartient à $]0,\pi[$ *d'où* $\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$.

ⓑ $\frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{2}}}{4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. *On a* $\frac{BA}{BC} = \frac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_B|} = \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = |w|$.

et on a aussi $\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi] \Leftrightarrow arg(w) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$.

D'où $\quad w = \left[\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\pi}{8}\right] = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$.

ⓒ $$w = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{3i+\sqrt{2}-i+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i+i\sqrt{2}+\sqrt{2}-i+i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+i(2+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(1+i)} = \frac{\left[\sqrt{2}+i(2+\sqrt{2})\right](1-i)}{4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} + i\frac{-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ainsi on a : $w = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

Donc $$\begin{cases} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$